1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 分,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ....

(2) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$ ________

(3) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=$ ....

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}=$_.

(5) 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2,则 $t=$ ....

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为 ( ) (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$,记 $S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a)$,$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则 ( ) (A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_3<S_1$

(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_1<S_3$

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则 ( ) (A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$,则 $F(x)$ ( )

(A) 为 正 常 数 (B) 为 负 常 数 (C) 恒 为 零 (D) 不 为 常 数

(5) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$ 为（ ）

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

三、(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

⑴ 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

⑵ 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

⑶ 计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$.

⑷ 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

⑸ 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

⑹ 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, 且 $A^2-AB=E$, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求矩阵 B.

四、(本题满分 8 分.)

λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解, 有惟一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

五、(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2,0)$ 为 L 上一定点, 若极径 OM_0、OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0,M 两点间弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

六、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续, 在开区间$(0,1)$内大于零, 并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）, 又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y=f(x)$, 并问a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

七、（本题满分 8 分.）

已知函数 $f(x)$ 连续, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 设$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 求$\varphi'(x)$, 并讨论$\varphi'(x)$的连续性.

八、（本题满分 8 分）

就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 分,每小题 3 分,满分 15 分.把答案在题中横线上.)

(1)【答案】$e^{-\frac{1}{2}}$

【解析】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{x^{-2}}}=\lim_{x\to 0} e^{x^{-2}\ln\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}\overset{\text{洛必达}}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

【相关知识点】1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 如果函数在 x_0 处连续,则有 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$.

(2)【答案】$-\dfrac{3}{2}$

【解析】题目考察复合函数在某点处的高阶导数,按照复合函数求导法则具体计算如下:

$$y=\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)\right],$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$y''=-\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad y''\big|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则:

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导,而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导,则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导,且其导数为 $\dfrac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

(3)【答案】$\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C$ 或 $2\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C$

【解析】题目考察不定积分的计算,分别采用凑微分的方法计算如下:

方法 1:原式 $=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$

方法 2：原式 $=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=2\int\frac{d\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$

(4) **【答案】** $\frac{\pi}{8}$

【解析】题目考察广义积分的计算，采用凑微分的方法，结合基本微分公式表计算如下：

$$\text{原式}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+(x+2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d(\frac{x+2}{2})}{1+(\frac{x+2}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}.$$

(5) **【答案】** 3

【解析】**方法 1**：利用初等变换.

以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为行构成 3×4 矩阵，对其作初等变换：

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(-1)}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&0&3-t&0\end{bmatrix},$$

因为 $r(A)=r\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=2$，所以 $3-t=0,t=3$.

方法 2：利用秩的定义.

由于 $r\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=r(A)=2$，则矩阵 A 中任一三阶子行列式应等于零.

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix},$$

应有

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&t\\0&-4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-4&t+2\\0&-4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-4&t+2\\0&0&3-t\end{vmatrix}=0,$$

解得$t=3$.

方法 3：利用线性相关性.

因为$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(A)=2$,故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\Leftrightarrow$以$\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T$组成的线性齐次方程组$\alpha_1^Tx_1+\alpha_2^Tx_2+\alpha_3^Tx_3=BX=0$有非零解,因

$$B=\left[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right]=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[4]+[1]\times(-1)}]{\substack{[2]+[1]\times(-2)\\ [3]+[1]}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[{[4]+[2]\times(-2)}]{\substack{[2]\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\ [3]+[2]\times(-t-2)}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&-t+3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $BX=0$ 有非零解$\Leftrightarrow t=3$.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)【答案】(C)

【解析】题目考察无穷小量的性质和无穷小量的比较,采用洛必达法则计算如下：

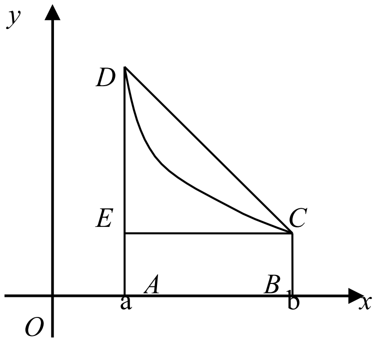
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}e^x\cdot\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^n}\overset{洛必达}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{nx^{n-1}}\overset{n=3}{=}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

$e^{\tan x}-e^x$与 x^3同阶,故应选(C).

(2)【答案】(D)

【解析】**方法** 1：用几何意义.由 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$ 可知,曲线 $y=f(x)$ 是上半平面的一段下降的凹弧，$y=f(x)$ 的图形大致如右图.



$S_1=\int_a^b f(x)dx$ 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积；

$S_2=f(b)(b-a)$ 是矩形 $ABCE$ 的面积；

$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 是梯形 $ABCD$ 的面积.

由图可见 $S_2<S_1<S_3$,应选(D).

方法 2：观察法.因为是要选择对任何满足条件的 $f(x)$ 都成立的结果,故可以取满足条件的特定的 $f(x)$ 来观察结果是什么.例如取 $f(x)=\frac{1}{x^2},x\in[1,2]$,则

$$S_1=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2},S_2=\frac{1}{4},S_3=\frac{5}{8}\Rightarrow S_2<S_1<S_3.$$

【评注】本题也可用分析方法证明如下：

由积分中值定理，至少存在一个点ξ，使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),a<\xi<b$成立，再由$f'(x)<0$，所以$f(x)$是单调递减的，故$f(\xi)>f(b)$，从而

$$S_1=\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)>f(b)(b-a)=S_2.$$

为证$S_3>S_1$，令$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(a)](x-a)-\int_a^x f(t)dt$，则$\varphi(a)=0$，

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)+\frac{1}{2}(f(x)+f(a))-f(x)\\&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)-\frac{1}{2}(f(x)-f(a))\\&=\frac{1}{2}f'(x)(x-a)-\frac{1}{2}f'(\eta)(x-a)\qquad(a<\eta<x)(\text{拉格朗日中值定理})\\&=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(\eta))(x-a),\end{aligned}$$

由于$f''(x)>0$，所以$f'(x)$是单调递增的，故$f'(x)>f'(\eta)$，$\varphi'(x)>0$，即$\varphi(x)$在$[a,b]$上单调递增的. 由于$\varphi(a)=0$，所以$\varphi(x)>0,x\in[a,b]$，从而

$$\varphi(b)=\frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)-\int_a^b f(t)dt>0,$$

即 $S_3>S_1$. 因此，$S_2<S_1<S_3$，应选(D).

如果题目改为证明题，则应该用评注所讲的办法去证，而不能用图证.

【相关知识点】1. 积分中值定理：如果函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上连续，则在(a,b)上至少存在一个点ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)(a<\xi<b)$. 这个公式叫做积分中值公式.

2. 拉格朗日中值定理：如果函数$f(x)$满足在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$成立.

(3) 【答案】(B)

【解析】题目考察函数的极值点与拐点问题，分析如下：

由$f'(x_0)=0$知$x=x_0$为$f(x)$的驻点. 把$x=x_0$代入恒等式$x_0f''(x_0)=1-e^{-x_0}$，即$f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}$. 由于分子、分母同号，故$f''(x_0)>0$，因此驻点$x=x_0$为极小值点. 应选

(B).

(4)【答案】(A)

【解析】由于函数$e^{\sin t}\sin t$是以2π为周期的函数,所以,

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt,$$

$F(x)$的值与 x 无关.不选 D,(周期函数在一个周期的积分与起点无关).

估计$\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt$的值有多种方法.

方法 1：划分$e^{\sin t}\sin t$取值正、负的区间.

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt\\&=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt+\int_0^{\pi}e^{-\sin u}(-\sin u)du\\&=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin tdt\end{aligned}$$

当$0<t<\pi$时，$\sin t>0$，$e^{\sin t}-e^{-\sin t}>0$,所以 $F(x)>0$.选(A).

方法 2：用分部积分法.

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\cos t\\&=-e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos tde^{\sin t}\\&=-e^0(1-1)+\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos t^2dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos t^2dt>0.\end{aligned}$$

故应选(A).

【评注】本题的方法 1 十分有代表性.

被积函数在积分区间上可以取到正值与负值时,则常将积分区间划分成若干个,使每一个区间内,被积函数保持确定的符号,然后再作适当的变量变换,使几个积分的积分上下限相同,然后只要估计被积函数的正、负即可.

(5)【答案】(D)

【解析】题目考察函数的复合问题,分清内层函数的定义域与值域,要注意内层函数的值域又构成了外层函数的定义域.

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$,则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=-x\le 0$,则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$.

故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$,因此应选(D).

三、(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分.)

⑴ 【分析】这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限,可以设法约去分子、分母中极限为∞的因子,从而转化为确定型的极限.于是分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$.在计算过程中应注意 x 趋于负无穷.

【解析】分子、分母同除 $\sqrt{x^2}$,注意 $\sqrt{x^2}=-x\ (x<0)$,则

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{\sqrt{4}-1}{1}=1.$$

⑵ 【解析】题目考察参数方程所确定的函数的微分法.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad x'_t=\frac{1}{1+t^2},$$

y'_t 可由第二个方程两边对t 求导得到：

$$2y'_t-2tyy'_t-y^2+e^t=0,$$

解得 $y'_t=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$. 由此, 有 $y'_x=\frac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2(1-ty)}$.

⑶ 【解析】题目考察,不定积分的换元与分部积分法,难度不大,具体计算如下：

$$原式=\int e^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)dx=\int e^{2x}\sec^2 x dx+2\int e^{2x}\tan x dx$$

$$\overset{分部}{=}\int e^{2x}d\tan x+\int\tan x de^{2x}=e^{2x}\tan x+C.$$

⑷ 【解析】题目考察齐次微分方程的通解,分别利用齐次方程的求解方法和凑全微分方法 计算如下：

方法 1：所给方程是齐次方程.

令 $y=xu$, 则$dy=xdu+udx$, 代入原方程得

$$3(1+u-u^2)dx+x(1-2u)du=0,$$

分离变量得 $\frac{1-2u}{1+u-u^2}du=-\frac{3}{x}dx$,

积 分 得 $\int\frac{d(1+u-u^2)}{1+u-u^2}=-3\int\frac{1}{x}dx$,

即 $1+u-u^2=Cx^{-3}$.

以$u=\frac{y}{x}$代入得通解 $x^2+xy-y^2=\frac{C}{x}$.

方法 2：用凑全微分的方法求解. 由于

$$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy$$

$$=3x^2dx+(yd(x^2)+x^2dy)-(y^2dx+xd(y^2))$$

$$=d(x^3)+d(x^2y)-d(xy^2)$$

$$=d(x^3+x^2y-xy^2),$$

故通解为： $x^3+x^2y-xy^2=C$.

⑸ 【解析】$y_1-y_3=e^{-x}$ 与 $y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x}$ 都是相应齐次方程的解，$(y_1-y_3)+(y_1-y_2)$ $=e^{2x}$ 也是相应齐次方程的解， e^{-x} 与 e^{2x} 是两个线性无关的相应齐次方程的解；而 $y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的解. 下面求该微分方程：

方法 1：由 e^{-x}，e^{2x} 是齐次解，知 $r_1=-1, r_2=2$ 是特征方程的两个根，特征方程为

$$(r+1)(r-2)=0,\ 即 r^2-r-2=0,$$

相应的齐次微分方程为： $y''-y'-2y=0$.

设所求非齐次方程为： $y''-y'-2y=f(x)$，把非齐次解 xe^x 代入，便得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2(xe^x)=(1-2x)e^x.$$

所求方程为： $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$.

方法 2：由于通解为： $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+xe^x$，求出

$$y'=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}+(x+1)e^x,\quad y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}+(x+2)e^x,$$

并消去 c_1，c_2，便得微分方程 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$.

(6)**【答案】** $\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

【解析】由题设条件 $A^2-AB=E$，把 A 提出来得 $A(A-B)=E$，因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

由此知道 A 是满秩的，所以 A 可逆，两边左乘 A^{-1}，从而有 $A-B=A^{-1}$， $B=A-A^{-1}$.

(或 $A^2-AB=E$，$AB=A^2-E$，A 可逆，两边左乘 A^{-1}，得 $B=A^{-1}\left(A^2-E\right)=A-A^{-1}$).

用矩阵的初等变换求 A^{-1}.

$$[A\vdots E]=\begin{bmatrix}1&1&-1&\vdots&1&0&0\\0&1&1&\vdots&0&1&0\\0&0&-1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]+[3]}]{[1]+[3]\times(-1)}\begin{bmatrix}1&1&0&\vdots&1&0&-1\\0&1&0&\vdots&0&1&1\\0&0&-1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[3]\times(-1)}]{[1]+[2]\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&1&-1&-2\\0&1&0&\vdots&0&1&1\\0&0&1&\vdots&0&0&-1\end{bmatrix}=\left[E\vdots A^{-1}\right]$$

得 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

从 而 得 $$B=A-A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

四、（本题满分 8 分.）

【解析】**方法 1**：对原方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$[A\vdots b]=\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&\vdots&1\\\lambda&-1&1&\vdots&2\\4&5&-5&\vdots&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]+[1]\times(-5)}]{[2]+[1]}\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&\vdots&1\\\lambda+2&\lambda-1&0&\vdots&3\\-6&-5\lambda+5&0&\vdots&-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times5}\begin{bmatrix}2&\lambda&-1&\vdots&1\\\lambda+2&\lambda-1&0&\vdots&3\\5\lambda+4&0&0&\vdots&9\end{bmatrix}$$

当 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$r(A)=r[A\vdots b]=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数，故原方程组有唯一解.

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A)=2\neq r[A\vdots b]=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等，故原方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1\qquad\qquad\ \ =1\end{cases},$$

原方程组有无穷多解，其通解为 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1+k,\\x_3=k.\end{cases}$（$k$ 为任意常数）.

（或 $[x_1,x_2,x_3]^T=[1,-1,0]^T+k[0,1,1]^T$（$k$ 为任意常数））

方法 2：原方程组系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&\lambda&\lambda-1\\\lambda&-1&0\\4&5&0\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故知：当 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$r(A)=r[A\vdots b]=3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且等于未知量的个数，故原方程组有唯一解.

当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，对原方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$[A\vdots b]=\begin{bmatrix}2&-\frac{4}{5}&-1&\vdots&1\\-\frac{4}{5}&-1&1&\vdots&2\\4&5&-5&\vdots&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]\times5}]{[1]\times5}\begin{bmatrix}10&-4&-5&\vdots&5\\-4&-5&5&\vdots&10\\4&5&-5&\vdots&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{[3]+[2]}\begin{bmatrix}10&-4&-5&\vdots&5\\-4&-5&5&\vdots&10\\0&0&0&\vdots&9\end{bmatrix}$$

$r(A)\neq r[A\vdots b]$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩不相等，故原方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时，对原方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$\begin{bmatrix}2&1&-1\vdots1\\1&-1&1\vdots2\\4&5&-5\vdots-1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]+[1]\times(-2)}]{[1]\leftrightarrow[2]}\begin{bmatrix}1&-1&1\vdots2\\0&3&-3\vdots-3\\0&9&-9\vdots-9\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]\times}]{[3]+[2]\times}\begin{bmatrix}1&-1&1\vdots2\\0&1&-1\vdots-1\\0&0&0\vdots0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r[A\vdots b]=2<3$，即方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相等且小于未知量的个数，故原方程组有无穷多解，其通解为 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1+k,\\x_3==k.\end{cases}$（$k$ 为任意常数）.

（或 $[x_1,x_2,x_3]^T=[1,-1,0]^T+k[0,1,1]^T$（$k$ 为任意常数））

五、（本题满分 8 分）

【解析】由已知条件得 $\frac{1}{2}\int_0^{\theta}r^2d\theta=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$.

两边对 θ 求导，得 $r^2=\sqrt{r^2+r'^2}$（隐式微分方程），

解 出 r'，得 $r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$.

分离变量，得 $\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm d\theta$.

由于 $$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = -\int \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{1-(\frac{1}{r})^2}} = \arccos\frac{1}{r},$$

或 $$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} \overset{r=\sec t}{=} \int dt = t = \arccos\frac{1}{r},$$

两边积分，得 $\arccos\frac{1}{r} = \pm\theta + c$.

代入初始条件 $r(0)=2$，得 $c = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$，$\Rightarrow \arccos\frac{1}{r} = \frac{\pi}{3} \pm \theta.$

即 L 的极坐标方程为 $\frac{1}{r} = \cos(\frac{\pi}{3} \pm \theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$，

从而，L 的直角坐标方程为 $x \mp \sqrt{3}y = 2$.

六、（本题满分 8 分）

【解析】由 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$，有

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}，即 (\frac{f(x)}{x})' = \frac{3a}{2},$$

从而得 $\frac{f(x)}{x} = \frac{3a}{2}x + C$，即 $f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx$.

又由题设知，面积

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3a}{2} + Cx)dx = \frac{a}{2} + \frac{C}{2} = 2,$$

得 $C = 4 - a$，从而 $f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4-a)x$.

旋转体体积 $V(a) = \pi\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_0^1 [\frac{3a}{2}x^2 + (4-a)x]^2\,dx = \pi(\frac{a^2}{30} + \frac{a}{3} + \frac{16}{3})$.

由 $V'(a) = \pi(\frac{a}{15} + \frac{1}{3}) = 0$，解得惟一驻点 $a = -5$；又由 $V''(a) = \frac{\pi}{15} > 0$，$a = -5$ 是极小值点也是最小值点.（易验证，此时 $f(x) = -\frac{15}{2}x^2 + 9x$ 在 $(0,1]$ 恒正.）

七、（本题满分 8 分.）

【分析】通过变换将 $\varphi(x)$ 化为积分上限函数的形式，此时 $x \neq 0$，但根据 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$，知 $f(0) = 0$，从而 $\varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$，由此，利用积分上限函数的求导法则、导数在一点处的定义以及函数连续性的定义来判定 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

【解析】由题设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 知，$f(0)=0, f'(0)=A$，且有$\varphi(0)=0$．又

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt \xlongequal{u=xt} \frac{\int_0^x f(u)du}{x} \qquad (x\neq 0),$$

从而 $$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2} \qquad (x\neq 0).$$

由导数定义，有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

由于 $$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0),$$

从而知$\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

八、（本题满分 8 分）

【解析】设 $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$，研究 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内的极值情况，从而判定它与水平线 $y=k$ 的交点个数．由 $f'(x)=1-\dfrac{\pi}{2}\cos x=0$ 解得 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内的唯一驻点 $x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$；由$\cos x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调减，$f'(x)$ 在点 x_0 由负变正，x_0 是 $f(x)$ 的极小点也是最小点．最小值 $f(x_0)=x_0-\dfrac{\pi}{2}\sin x_0 \triangleq y_0$；由此，最大值 $f(0)=f(\dfrac{\pi}{2})=0$（显然 $y_0<0$）．

当 $k\geq 0$ 或 $k<y_0$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=k$ 没有交点；当 $k=y_0$ 时，两者有唯一交点；当 $y_0<k<0$ 时，两者有两个交点．

评注：也可以设 $g(x)=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x-k$，研究它的零点个数．