公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'|_{x=0}=$____________.

(2) $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2 dx=$____________.

(3) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为____________.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\right]=$____________.

(5) 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}, x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设当 $x\to 0$ 时, $e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 ( )

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1$ (B) $a=1, b=1$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=-1$ (D) $a=-1, b=1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间$(-\delta,\delta)$内有定义,若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,恒有$|f(x)|\le x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 ( )

(A) 间断点 (B) 连续而不可导的点

(C) 可导的点,且 $f'(0)=0$ (D) 可导的点,且 $f'(0)\ne 0$

(3) 设 $f(x)$ 处处可导,则 ( )

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(4) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内,方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ ( )

(A) 无实根 (B) 有且仅有一个实根

公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

(C) 有且仅有两个实根 (D) 有无穷多个实根

(5) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x) < f(x) < m$（m 为常数），由曲线 $y = g(x)$, $y = f(x), x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为 （ ）

(A) $\int_a^b \pi\left[2m - f(x) + g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(B) $\int_a^b \pi\left[2m - f(x) - g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(C) $\int_a^b \pi\left[m - f(x) + g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(D) $\int_a^b \pi\left[m - f(x) - g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

三、（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.）

(1) 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}}\, dx$.

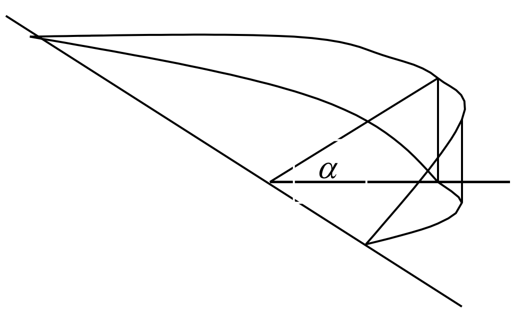
(2) 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

(3) 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2)du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u) \neq 0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(4) 求函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $x = 0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

(5) 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解.

(6) 设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a$、$2b$，用过此柱体底面的短轴与底面成 α 角（$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）的平面截此柱体，得一锲形体（如图），求此锲形体的体积 V .



四、（本题满分 8 分）

计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

五、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1\le x\le 2, \\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

① 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

② $g(x)$ 是否有间断点、不可导点，若有，指出这些点.

六、（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它是否为极值点.

七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，试证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

八、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 为连续函数，

(1) 求初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x), \\ y|_{x=0}=0\end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 a 为正的常数；

(2) 若 $|f(x)|\le k$（k 为常数），证明：当 $x\ge 0$ 时，有 $|y(x)|\le \frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

卡巴学长

公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$y'=\frac{2}{3}\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$，$y'\big|_{x=0}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$.

(2)【答案】2

【解析】注意到对称区间上奇偶函数的积分性质,有

$$原式=\int_{-1}^{1}\left[x^2+2x\sqrt{1-x^2}+\left(1-x^2\right)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[2x\sqrt{1-x^2}+1\right]dx=0+2=2.$$

【相关知识点】对称区间上奇偶函数的积分性质：

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$；

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$.

(3)【答案】 $y=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)$

【解析】因为 $y''+2y'+5y=0$ 是常系数的线性齐次方程, 其特征方程 $r^2+2r+5=0$ 有一对共轭复根 $r_1,r_2=-1\pm 2i$. 故通解为 $y=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)$.

(4)【答案】2

【解析】因为 $x\to\infty$ 时, $\sin\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x}$（ k 为常数), 所以,

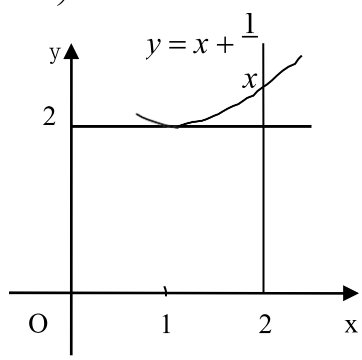
$$原式=\lim_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\left(x\cdot\frac{3}{x}\right)-\lim\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=3-1=2.$$

(5)【答案】$\ln 2-\frac{1}{2}$

【解析】曲线 $y=x+\frac{1}{x}$, $y=2$ 的交点是 $(1,2)$, $y'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2-1}{x^2}$, 当 $x>1$ 时 $y=x+\frac{1}{x}$ (单调上升)在 $y=2$ 上方, 于是

$$S=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x-2x\right)\Bigg|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}.$$



公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(A)

【解析】**方法 1**：用带皮亚诺余项泰勒公式.由

$$\begin{aligned}&e^x-(ax^2+bx+1)\\&=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)-(ax^2+bx+1)\\&=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)\ 令\ o(x^2),\end{aligned}$$

可得 $\begin{cases}1-b=0,\\ \frac{1}{2}-a=0,\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=1.$ 应选(A).

方法 2：用洛必达法则.由

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=0,$$

有 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-2ax-b)=1-b=0\Rightarrow b=1.$

又由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-2a}{2}=\frac{1-2a}{2}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$

应选(A).

(2)【答案】(C)

【解析】**方法一**：首先,当 $x=0$ 时, $|f(0)|\le0\Rightarrow f(0)=0$.

而按照可导定义我们考察

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|\to0(x\to0),$$

由夹逼准则, $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$, 故应选(C).

方法二：显然, $f(0)=0$, 由 $|f(x)|\le x^2$, $x\in(-\delta,\delta)$, 得 $\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|\le1$, $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$, 即 $\frac{f(x)}{x^2}$ 有界, 且

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x^2}\cdot x\right)=0.$$

故应选(C).

方法三：排除法.

卡巴学长

令 $f(x)=x^3, f'(0)=0$, 故(A)、(B)、(D)均不对, 应选(C).

【相关知识点】定理：有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3)【答案】(D)

【解析】**方法一**：排除法. 例如 $f(x)=x$, 则(A), (C)不对；又令 $f(x)=e^{-x}$, 则(B)不对. 故应选择(D).

方法二：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 对于 $M>0$, 存在 x_0, 使得当 $x>x_0$ 时, $f'(x)>M$.

由此, 当 $x>x_0$ 时, 由拉格朗日中值定理,

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+M(x-x_0)\to+\infty \quad (x\to+\infty),$$

从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 故应选择(D).

【相关知识点】拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导,

那么在(a,b)内至少有一点ξ（$a<\xi<b$）, 使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

(4)【答案】(C)

【解析】令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$, 则 $f(-x)=f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数, 考察 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内的实数个数：

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x\ (x>0).$$

首先注意到 $f(0)=-1<0$, $f(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}}+(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}>1>0$, 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 由零值定理, 函数 $f(x)$ 必有零点, 且由

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0,$$

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增, 故 $f(x)$ 有唯一零点.

当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x \geq (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}} + (\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$，没有零点；

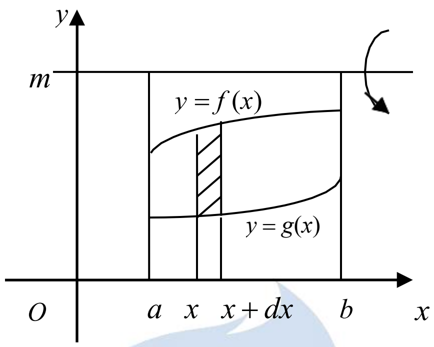
因此，$f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 有一个零点. 又由于 $f(x)$ 是偶函数，$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 有两个零点.

故应选(C).

【相关知识点】零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$)，那么在开区间(a, b) 内至少有一点ξ，使 $f(\xi) = 0$.

(5) 【答案】(B)

【解析】



见上图，作垂直分割，相应于$[x, x + dx]$的小竖条的体积微元

$$dV = \pi(m - g(x))^2 dx - \pi(m - f(x))^2 dx$$

$$= \pi\left[(m - g(x)) + (m - f(x))\right] \cdot \left[(m - g(x)) - (m - f(x))\right] dx$$

$$= \pi\left[2m - g(x) - f(x)\right] \cdot \left[f(x) - g(x)\right] dx,$$

于是 $$V = \int_a^b \pi\left[2m - g(x) - f(x)\right] \cdot \left[f(x) - g(x)\right] dx,$$

故选择(B).

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.)

(1)【解析】方法一：换元法.

令 $\sqrt{1 - e^{-2x}} = u$，则 $x = -\frac{1}{2}\ln(1 - u^2), dx = \frac{u}{1 - u^2} du$，

所以 $$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2}{1 - u^2} du = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\frac{1}{1 - u^2} - 1) du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} - 2) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

方法二：换元法.

令 $e^{-x} = \sin t$，则 $x = -\ln\sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$，$x: 0 \to \ln 2 \Rightarrow t: \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{6}$，

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\cdot\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt$$

$$=\ln(\csc t-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

方法三：分部积分法和换元法结合.

$$原式=\int_0^{\ln 2}e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}d(-e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}e^{-x}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$$

令$e^x=t$，则 $x:0\to\ln 2\Rightarrow t:1\to 2$，

$$原式=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big|_1^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

【相关知识点】1. $\int\csc x dx=\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$，

2. $a>0$时，$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

(2) 【解析】**方法一：**$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 xdx+\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$

方法二：$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}dx=2\int\frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

方法三：换元法.

令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $x=2\arctan t, dx=\frac{2}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{2t}{1+t^2}$，

$$原式=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

(3)
【解析】这是由参数方程所确定的函数，其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2f(t^2)\cdot f'(t^2)\cdot 2t}{f(t^2)}=4tf'(t^2),$$

所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(4tf'(t^2)\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left[4f'(t^2)+4tf''(t^2)\cdot 2t\right]\cdot\frac{1}{f(t^2)}$$

$$=\frac{4}{f(t^2)}\left[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)\right].$$

(4)
【解析】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的泰勒展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},(0<\theta<1).$$

对于函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，有

$$f(x)=\frac{2}{1+x}-1=2(1+x)^{-1}-1,$$

$$f'(x)=2\cdot(-1)(1+x)^{-2},$$

$$f''(x)=2\cdot(-1)\cdot(-2)(1+x)^{-3},$$

$$,\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=2(-1)^n\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}$$

所 以 $f^{(n)}(0)=2(-1)^n\cdot n!,\quad (n=1,2,3\cdots),$

故 $$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\ (0<\theta<1).$$

(5)
【解析】**方法一**：微分方程 $y''+y=x^2$ 对应的齐次方程 $y''+y'=0$ 的特征方程为 $r^2+r=0$，两个根为 $r_1=0, r_2=-1$，故齐次方程的通解为 $y=c_1+c_2e^{-x}$.

设非齐次方程的特解 $Y=x\cdot(ax^2+bx+c)$，代入方程可以得到 $a=\dfrac{1}{3}, b=-1, c=2$，因此方程通解为 $y=c_1+c_2e^{-x}+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x$.

方法二：方程可以写成 $(y+y')'=x^2$，积分得 $y+y'=\dfrac{x^3}{3}+c_0$

程, 可直接利用通解公式求解. 通解为

$$y = e^{-\int dx}\left(\int\left(\frac{x^3}{3}+c_0\right)e^{\int dx}dx + C\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int\left(\frac{x^3}{3}+c_0\right)e^{x}dx + C\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{3}\int x^3 de^{x} + c_0e^{x} + C\right)$$

$$= \frac{e^{-x}}{3}\left(x^3e^{x} - 3\int e^{x}x^2dx\right) + c_0 + Ce^{-x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - e^{-x}\int e^{x}x^2dx + c_0 + Ce^{-x} = \frac{x^3}{3} - e^{-x}\left(e^{x}x^2 - 2\int e^{x}xdx\right) + c_0 + Ce^{-x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2e^{-x}\left(e^{x}x - e^{x}\right) + c_0 + Ce^{-x}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + c_1 + Ce^{-x}.$$

方法三：作为可降阶的二阶方程, 令 $y' = P$, 则 $y'' = P'$, 方程化为 $P' + P = x^2$, 这是一阶线性非齐次微分方程, 可直接利用通解公式求解. 通解为

$$P = e^{-x}\left(c_0 + \int x^2e^{x}dx\right) = e^{-x}\left(c_0 + x^2e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x}\right)$$
$$= c_0e^{-x} + x^2 - 2x + 2.$$

再积分得 $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$.

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解：即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2；

分三种情况：

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2, 则通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$;

② 两个相等的实数根$r_1=r_2$，则通解为$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx_1}$；

③ 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中$C_1$, C_2为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中$Q_m(x)$是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式，而 k 按λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是m 次多项式，$m=\max\left\{l,n\right\}$，而k 按 $\lambda+i\omega$（或$\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为0 或1.

4. 一阶线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

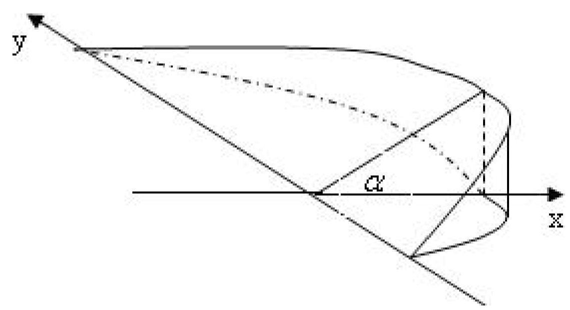
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)，$$ 其中C 为任意常数.

(6) 【解析】建立坐标系，底面椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

方法一：以垂直于 y 轴的平面截此楔形体所得的截面为直角三角形，

其中一条直角边长为$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$，

另一条直角边长为$\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\cdot\tan\alpha$，



故截面面积为

$$S(y)=\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\cdot\tan\alpha.$$

楔形体的体积为

$$V=2\int_0^b S(y)dy=\frac{a^2}{b^2}\tan\alpha\int_0^b(b^2-y^2)dy=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha.$$

方法二：以垂直于 x 轴的平面截此楔形体所得的截面为矩形，

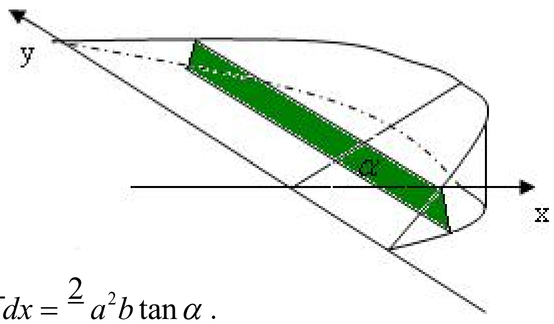
公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

其中一条边长为$2y=2\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

另一条边长为 $x\cdot\tan\alpha$,

故截面面积为

$$S(x)=2\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\cdot\tan\alpha,$$



楔形体的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)dx=\frac{2b}{a}\tan\alpha\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha.$$

四、(本题满分 8 分)

【解析】**方法一**：分部积分法.

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

$$=\int\arctan x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\arctan x\,d(\arctan x)$$

$$\overset{\text{分部}}{=\!=}-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

方法二：换元法与分部积分法结合.

令$\arctan x=t$，则 $x=\tan t,\ dx=\sec^2 t\,dt$,

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{t\sec^2 t}{\tan^2 t(1+\tan^2 t)}dt=\int\frac{t}{\tan^2 t}dt=\int t\cot^2 t\,dt$$

$$=\int t(\csc^2 t-1)dt=\int t\,d(-\cot t)-\int t\,dt$$

$$\overset{\text{分部}}{=\!=}-t\cot t+\int\cot t\,dt-\frac{1}{2}t^2$$

$$=-t\cot t+\int\frac{\cos x}{\sin x}dt-\frac{1}{2}t^2$$

$$=-t\cot t+\int\frac{1}{\sin t}d\sin t-\frac{1}{2}t^2$$

$$=-t\cot t+\ln|\sin t|-\frac{1}{2}t^2+C.$$

五、(本题满分 8 分)

【分析】为了正确写出函数 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$，并快捷地判断出函数 $g(x)$ 的连续性、可导

卡巴学长

公众号：卡巴学长考研中心 Q群：983277199 837961369 904525171 微信：KBXZ111 专注考研专业课一对一辅导 更多资料群内咨询

性，须知道如下关于反函数的有关性质.

【相关知识点】反函数的性质：① 若函数 $f(x)$ 是单调且连续的，则反函数 $g(x)$ 有相同的单调性且也是连续的；② 函数 $f(x)$ 的值域即为反函数 $g(x)$ 的定义域；③ $g'(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$，故函数 $f(x)$ 的不可导点和使 $f'(x)=0$ 的点 x 对应的值 $f(x)$ 均为 $g(x)$ 的不可导点.

【解析】(1) 由题设，函数 $f(x)$ 的反函数为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x\le 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

(2) **方法一：**考察 $f(x)$ 的连续性与导函数. 注意

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\le x\le 2,\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

在 $(-\infty,-1),(-1,2),(2,+\infty)$ 区间上 $f(x)$ 分别与初等函数相同，故连续. 在 $x=-1,x=2$ 处分别左、右连续，故连续. 易求得

$$f'(x)=\begin{cases}-4x, & x<-1,\\ 3x^2, & -1<x<2, f_-'(-1)=4, f_+'(-1)=3,\\ 12, & x>2\end{cases}$$

$$f_-'(2)=12, f_+'(2)=12\Rightarrow f'(2)=12.$$

由于函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内单调上升且连续，故函数 $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调且连续，没有间断点.

由于仅有 $x=0$ 时 $f'(x)=0$ 且 $f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的不可导点；仅有 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的不可导点(左、右导数$\exists$，但不相等)，因此 $g(x)$ 在 $f(-1)=-1$处不可导.

方法二：直接考察 $g(x)$ 的连续性与可导性. 注意

$$g(x)=\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x\le 8, \\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8, \end{cases}$$

在 $(-\infty,-1),(-1,8),(8,+\infty)$ 区间上 $g(x)$ 分别与初等函数相同, 故连续. 在 $x=-1,x=8$ 处分别左、右连续, 故连续, 即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续, 没有间断点.

$g(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,8),(8,+\infty)$ 内分别与初等函数相同, 这些初等函数只有 $\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 不可导, 其余均可导. 在 $x=-1$ 处,

$$g'_-(-1)=\left(-\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)'_-\Bigg|_{x=-1}=\frac{1}{4},\quad g'_+(-1)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'_+\Big|_{x=-1}=\frac{1}{3},$$

$\Rightarrow g'(-1)$ 不$\exists$. 在 $x=8$ 处,

$$g'_-(8)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\Big|_{x=8}=\frac{1}{12},\ g'_+(8)=\left(\frac{x+16}{12}\right)'_+\Bigg|_{x=8}=\frac{1}{12},$$

$\Rightarrow g'(8)\,\exists$.

因此, $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有 $x=0$ 与 $x=-1$ 两个不可导点.

六、(本题满分 8 分)

【解析】方程两边对 x 求导, 得

$$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0,\ (3y^2-2y+x)y'+y-x=0.\ ①$$

令 $y'=0$, 得 $y=x$,代入原方程得 $2x^3-x^2-1=0$, 解之得唯一驻点 $x=1$ ；对①两边再求导又得

$$(3y^2-2y+x)y''+(3y^2-2y+x)'_x y'+y'-1=0. \qquad ②$$

以 $x=y=1,y'=0$ 代入②得

$$2y''-1=0,\quad y''\big|_{x=1}=\frac{1}{2}>0,$$

$x=1$ 是极小点.

【相关知识点】1. 驻点：通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点).

2. 函数在驻点处取得极大值或极小值的判定定理.

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时，可以利用下述定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极大值还是极小值.

定理：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，那么

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

七、(本题满分 8 分)

【解析】首先证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$：

方法一：用零点定理. 主要是要证明 $f(x)$ 在(a,b) 有正值点与负值点. 不妨设 $f'(a)>0$, $f'(b)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}= f_+'(a)=f'(a)>0$ 与极限局部保号性,知在 $x=a$ 的某右邻域, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,从而 $f(x)>0$,因而 $\exists x_1, b>x_1>a, f(x_1)>0$；类似地,由 $f'(b)>0$ 可证 $\exists x_2, x_1<x_2<b, f(x_2)<0$.由零点定理, $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

方法二：反证法. 假设在(a,b) 内 $f(x)\neq 0$，则由 $f(x)$ 的连续性可得 $f(x)>0$，或 $f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$. 由导数定义与极限局部保号性,

$$f'(a)=f_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geq 0,$$
$$f'(b)=f_-'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leq 0,$$

从而 $f'(a)f'(b)\leq 0$，与 $f'(a)f'(b)>0$ 矛盾.

其次，证明 $\exists\eta\in(a,b)$，$f''(\eta)=0$：

由于 $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$，根据罗尔定理,

$\exists\eta_1\in(a,\xi),\eta_2\in(\xi,b)$，使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$；又由罗尔定理,

$\exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b), f''(\eta)=0$.

注：由 $f'(x_0)>0$ 可得：在$(x_0-\delta,x_0), f(x)<f(x_0)$；在$(x_0,x_0+\delta), f(x)>f(x_0)$. 注意

由 $f'(x_0)>0$ 得不到 $f(x)$ 在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 单调增的结果！

【相关知识点】1. 零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间(a, b) 内至少有一点ξ,使 $f(\xi)=0$.

2 函数极限的局部保号性定理：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$ (或 $A<0$),那么存在常数$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

3 函数极限局部保号性定理的推论：如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geq 0$ (或 $f(x)\leq 0$), 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么 $A\geq 0$ (或 $A\leq 0$).

4 罗尔定理：如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那么在(a, b) 内至少有一点ξ（ $a<\xi<b$), 使得 $f'(\xi)=0$.

八、(本题满分 8 分)

【解析】(1) $y'+ay=f(x)$ 为一阶线性非齐次微分方程, 可直接利用通解公式求解. 通解为

$$y(x)=e^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C\right]=e^{-ax}\left[F(x)+C\right],$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数,由 $y(0)=0$ 得$C=-F(0)$,故

$$y(x)=e^{-ax}\left[F(x)-F(0)\right]=e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)dt .$$

(2) 当$x\geq 0$时, $|y(x)|=e^{-ax}\cdot\left|\int_0^x e^{at}f(t)dt\right|\leq e^{-ax}\int_0^x e^{at}|f(t)|dt$

$$\leq ke^{-ax}\cdot\int_0^x e^{at}dt=ke^{-ax}\cdot\left(\frac{1}{a}e^{at}\Big|_0^x\right)=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}).$$

【相关知识点】一阶线性非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right),$$ 其中C 为任意常数.