1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$,则 $y'=$____________.

(2) 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为____________.

(3) 曲线 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为____________.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$____________.

(5) 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点,则 ( )

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点 (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点 (D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(2) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为 ( )

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且对任意 x_1,x_2,当 $x_1>x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则 ( )

(A) 对任意 $x, f'(x)>0$ (B) 对任意 $x, f'(-x)\le 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加 (D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（ ）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(5) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（ ）

(A) $f(0)=0$ (B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$ (D) $f(0)-f'(0)=0$

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱（$0\le t\le2\pi$）的弧长.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$，已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

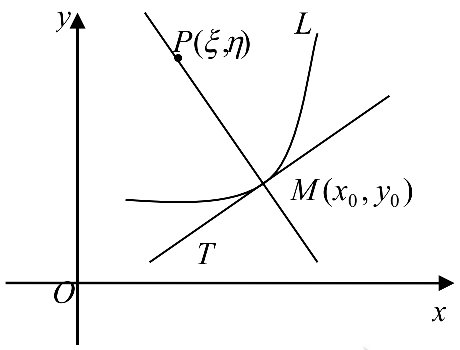
求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln2}=0$ 的特解.

六、（本题满分 8 分）

如图，设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，且 $y''>0$，又 MT，MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线，已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$（其中 $y_0'=y'(x_0)$，$y_0''=y''(x_0)$），试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.



七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

八、（本题满分 8 分）

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\ge x$.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】$-2x\sin(x^2)\cdot\sin^2\frac{1}{x}-\dfrac{\cos(x^2)\cdot\sin\frac{2}{x}}{x^2}$

【解析】该函数是由两个复合函数的乘积构成,满足复合函数求导法则,

$$y'=\left[\cos(x^2)\right]'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)\left[\sin^2\frac{1}{x}\right]'$$

$$=-\sin(x^2)\cdot 2x\cdot\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-2x\sin(x^2)\cdot\sin^2\frac{1}{x}-\frac{\cos(x^2)\cdot\sin\frac{2}{x}}{x^2}.$$

【相关知识点】复合函数求导法则： $y=\varphi(f(x))$ 的导数为 $y'=\varphi'(f(x))f'(x)$.

(2)【答案】 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-2x$

【解析】微分方程 $y''+y=-2x$ 对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为$r^2+1=0$,特征根为$r_{1,2}=\pm i$, 故对应齐次方程的通解为$C_1\cos x+C_2\sin x$.

设非齐次方程的特解$Y=ax+b$, 则$Y'=a$, $Y''=0$, 代入微分方程 $y''+y=-2x$, 得

$$0+ax+b=-2x,$$

比较系数得$a=-2,\ b=0$, 故$Y=-2x$. 所以通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x.$$

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解, 则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$ 、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为$r^2+pr+q=0$, 在复数域内解出两个特征根r_1, r_2 ；分三种情况：

① 两个不相等的实数根r_1, r_2 , 则通解为$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

② 两个相等的实数根$r_1=r_2$，则通解为$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r x_1}$；

③ 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中$C_1$，$C_2$为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中$Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式，而 k 按λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是m 次多项式，$m=\max\left\{l,n\right\}$，而k 按 $\lambda+i\omega$（或$\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为0 或1.

(3)【答案】 $y-3x+7=0$

【解析】切线的斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=2}=\left.\frac{3t^2}{2t}\right|_{t=2}=\left.\frac{3}{2}t\right|_{t=2}=3.$$

当$t=2$ 时，$x=5,y=8$. 故所求切线方程为 $y-8=3(x-5)$. 化简得 $y-3x+7=0$.

【相关知识点】参数方程所确定函数的微分法：如果$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\varphi(t)\end{cases}$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

(4)【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】应用夹逼准则求数列的极限. 令

$$a_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

则 $a_n>\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}.$$

又 $a_n<\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$,

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{1}{2}$,

所 以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2}<\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

由夹逼准则,得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(5)【答案】 $y=0$

【解析】函数 $y=x^2e^{-x^2}$ 的定义域为全体实数,且

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=0,$$

所以曲线只有一条水平渐近线 $y=0$.

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$（ a 为常数),则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.）

(1)【答案】(D)

【解析】**方法一**：反证法,利用连续函数的性质,即有限多个在同一点处连续的函数之乘积,仍然在该点处连续.

设函数 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点,因为 $f(x)$ 是连续函数,则 $\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 必无间断点,这与 $\varphi(x)$ 有间断点矛盾,故应选择(D).

方法二：排除法,举出反例排除.

设 $f(x)\equiv 1,\varphi(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}$

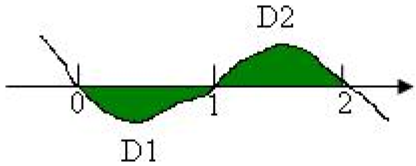
则 $\varphi[f(x)]\equiv 1, f[\varphi(x)]\equiv 1, [\varphi(x)]^2\equiv 1$ 都处处连续，排除(A)，(B)，(C)．故应选择(D)．

(2) 【答案】(C)

【解析】**方法一**：利用定积分的求面积公式有

$$\int_0^2 |x(x-1)(2-x)|dx=\int_0^2 x|(x-1)|(2-x)dx$$

$$=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$$



应选择(C)．

方法二：画出曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 的草图，所求面积为图中两面积之和，即

$$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx,$$

故应选(C)．

(3) 【答案】(D)

【解析】因为对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，$-x_1<-x_2$，则函数 $f(-x_1)< f(-x_2)$，即

$-f(-x_1)>-f(-x_2)$，故 $-f(-x)$ 是单调增加的．应选择(D)．

对于(A)(B)(C)可令 $f(x)=x^3$，则对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，

但 $f'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0$，

$f'(-x)=3(-x)^2\ge 0$，

$f(-x)=-x^3$，在其定义域内单调减少．

故排除(A)(B)(C)．

(4) 【答案】(B)

【解析】由 $f''(x)>0$ 可知 $f'(x)$ 在区间$[0,1]$上为严格的单调递增函数，故

$$f'(1)>f'(x)>f'(0),\ (0<x<1)$$

由微分中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi),(0<\xi<1)$．所以

$$f'(1)>f(1)-f(0)=f'(\xi)>f'(0),\ (0<\xi<1)$$

应选择(B)．

(5) 【答案】(A)

【解析】函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 存在且相等．

由于 $F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$，而 $f(x)$ 可导，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导等价于 $f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 可导.

令 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$，则

$$\begin{cases}\varphi_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)\sin x}{x}=f(0),\\ \varphi_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}=-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)\sin x}{x}=-f(0),\end{cases}$$

于是要使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，当且仅当 $-f(0)=f(0)$，即 $f(0)=0$. 故选择(A).

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.)

(1)【解析】利用等价无穷小计算，即当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$.

$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac12\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=\frac12\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2x\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}=\frac12.$$

(2)【解析】这是一个由复合函数和隐函数所确定的函数.

方法一：将方程两边对 x 求导，得

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}\cdot f'(y)\cdot y'=e^y\cdot y',$$

即 $y'=\dfrac{e^{f(y)}}{e^y-xf'(y)e^{f(y)}}$,

将 $xe^{f(y)}=e^y$ 代入并化简，得 $y'=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$.

两边再对 x 求导，得

$$y''=\frac{0-\left[x(1-f'(y))\right]'}{\left[x(1-f'(y))\right]^2}=\frac{-\left[(1-f'(y))+x(-f''(y)\cdot y')\right]}{\left[x(1-f'(y))\right]^2}$$

$$=-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}+\frac{y'f''(y)}{x\left[(1-f'(y))\right]^2}.$$

将 $y'=\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$ 代入并化简得

$$y''=-\frac{1}{x^2(1-f'(y))}+\frac{f''(y)}{x^2\left[(1-f'(y))\right]^3}.$$

方法二：方程两边先取对数再对 x 求导.

方程两边取对数得 $\ln x + f(y) = y$,

求 导 得 $\frac{1}{x} + f'(y)\cdot y' = y'$,

因为 $f' \neq 1$, 所以 $y' = \frac{1}{x(1-f'(y))}$.

以下同方法一.

【相关知识点】复合函数求导法则： $y = \varphi(f(x))$ 的导数为 $y' = \varphi'(f(x))f'(x)$.

(3)【解析】首先应求出 $\varphi(x)$ 的表达式. 由

$$f(x^2-1) = \ln\frac{x^2}{x^2-2} = \ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1},$$

令 $x^2-1=t$, 得 $f(t) = \ln\frac{t+1}{t-1}$. 又

$$f[\varphi(x)] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

则 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x$. 解得 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$. 因此

$$\int\varphi(x)dx = \int\frac{x+1}{x-1}dx = \int(1+\frac{2}{x-1})dx = x + 2\ln|x-1| + C.$$

(4)【解析】函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导函数连续的充分必要条件是 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 存在且必与 $f'(x_0)$ 相等.

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}$, 由于

$$\lim_{x\to0-} f'(x) = \lim_{x\to0+} f'(x) = \lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0}\left[\arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4}\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2},$$

所 以 $\lim_{x\to0-} f'(x) = \lim_{x\to0+} f'(x) = f'(0)$.

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. (5)

【解析】由弧微分公式得

$$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}\,dt=\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt,$$

所以

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=-4\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4(-1-1)=8.$$

(6)【解析】设质点的运动速度为$v(t)$，由题设，阻力为$-v(t)$，按牛顿第二定律有

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-v(t),$$

其中质量$m=1$，即 $\frac{dv(t)}{dt}=-v(t)$.

这是简单变量可分离的微分方程，解之得$v(t)=Ce^{-t}$.

另有初始条件$v(0)=v_0$，得$v(t)=v_0e^{-t}$.

当此质点的速度为$\frac{v_0}{3}$时，有$\frac{v_0}{3}=v_0e^{-t}$，得$t=\ln 3$.

到此时刻该质点所经过的路程为

$$s=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}dt=-v_0\left[e^{-t}\right]_0^{\ln 3}=-v_0\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}v_0.$$

四、（本题满分 8 分）

【解析】对函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 两边求导并令 $f'(x)=0$，得

$$f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0,$$

解得驻点$x=0,x=\pm\sqrt{2}$.

由于
$$\begin{cases}f'(x)>0, & -\infty<x<-\sqrt{2}, & f(x)\text{严格单调增},\\ f'(x)<0, & -\sqrt{2}<x<0, & f(x)\text{严格单调减},\\ f'(x)>0, & 0<x<\sqrt{2}, & f(x)\text{严格单调增},\\ f'(x)<0, & \sqrt{2}<x<+\infty, & f(x)\text{严格单调减},\end{cases}$$

所以 $f(-\sqrt{2}),f(\sqrt{2})$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点，$f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点，且

$$f(\pm\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2e^{-t}dt=1+e^{-2},$$

$$f(0)=\int_0^0(2-t)e^{-t}dt=0,$$

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$,

所以 $f(\pm 2)=\sqrt{1+e^{-2}}$ 为函数 $f(x)$ 最大值，$f(0)=0$ 为函数 $f(x)$ 的最小值.

【相关知识点】积分上限函数的求导公式：

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

五、（本题满分 8 分）

【解析】把 $y=e^x$ 和 $y'=e^x$ 代入所给的一阶线性微分方程，得

$$xe^x+p(x)e^x=x,$$

解 得 $p(x)=xe^{-x}-x$.

线性方程被确定为 $xy'+(xe^{-x}-x)y=x$，即

$$y'+(e^{-x}-1)y=1.$$

这是一阶线性非齐次微分方程，通解为

$$y=e^{-\int(e^{-x}-1)dx}\left(\int e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{e^{-x}+x}\left(\int e^{-e^{-x}-x}dx+C\right)=e^{e^{-x}+x}\left(\int \frac{e^{-e^{-x}}}{e^{x}}dx+C\right)=e^{e^{-x}+x}\left(\int\left(e^{-e^{-x}}\right)'dx+C\right)$$

$$=e^{e^{-x}+x}(e^{-e^{-x}}+C)=e^x+Ce^{e^{-x}+x}.$$

再 由 $y|_{x=\ln 2}=0$ 得 $e^{\ln 2}+Ce^{e^{-\ln 2}+\ln 2}=0$，即 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$.

故所求的特解为 $y=e^x-e^{e^{-x}+x-\frac{1}{2}}$.

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解公式为：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)，其中 C 为常数.$$

六、（本题满分 8 分）

【解析】要求点 P 的坐标，也就是说，要用 x_0,y_0,y_0',y_0''，表示出 ξ,η.

由 $|MP|=\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}\big/|y_0''|$，有

$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2=\frac{\left(1+y_0'^2\right)^3}{y_0''^2}, \quad ①$$

又由法线的斜率与切线斜率互为负倒数的关系, 知

$$y_0'=-\frac{\xi-x_0}{\eta-y_0}, \quad ②$$

把②式, 即$(\xi-x_0)=-y_0'(\eta-y_0)$代入①消去$\xi$, 得到

$$(\eta-y_0)^2=(1+y_0'^2)^2/y_0''^2, \quad ③$$

由$y''>0$, 知曲线是向上凹的, 容易看出$\eta>y_0$, 所以③可化为 $\eta-y_0=\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$,

且
$$\xi-x_0=-y_0'(\eta-y_0)=-\frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''},$$

于 是 得
$$\begin{cases}\xi=x_0-\dfrac{y_0'}{y_0''}(1+y_0'^2),\\ \eta=y_0+\dfrac{1}{y_0''}(1+y_0'^2).\end{cases}$$

七、(本题满分 8 分)

【解析】方法一：这是一个积分上限函数求定积分, 可以考虑用定积分的分部积分法.

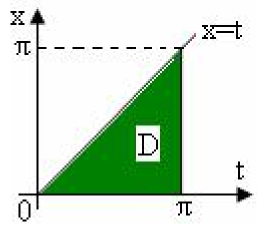
由 于 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$,

因而由分部积分法和 $f(0)=\int_0^0\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt=0$, 有

$$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)d(x-\pi)=f(x)(x-\pi)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)(\pi-x)dx$$
$$=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi\sin xdx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2.$$

方法二：对于二重积分 $\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt\right)dx$, 可以通过变换积分次序来求解.

$$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt\right)dx=\iint_D\frac{\sin t}{\pi-t}dtdx,$$



其中

$$D=\left\{(x,t)\middle|\,0\le x\le\pi,0\le t\le x\right\}$$
$$=\left\{(x,t)\middle|\,0\le t\le\pi,t\le x\le\pi\right\}.$$

于是

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}\left(\int_t^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}dx\right)dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}dt\int_t^{\pi}dx = \int_0^{\pi}\sin tdt = 2 .$$

八、(本题满分 8 分)

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 所以必有 $f(0) = 0$, 且

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 .$$

证法一：用函数单调性证明不等式.

令 $\varphi(x) = f(x) - x$,

则 $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = f'(x) - f'(0)$.

由于 $f''(x) > 0$, 所以函数 $f'(x)$ 单调增加,

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f'(x) - f'(0) > 0, x > 0, \\ \varphi'(x) = f'(x) - f'(0) < 0, x < 0, \end{cases}$$

$\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 由负变正, 所以 $x = 0$ 是 $\varphi(x)$ 的极小值点也是最小值点,

$$\varphi(x) = f(x) - x \ge \varphi(0) = f(0) - 0 = 0 ,$$

即 $f(x) \ge x$.

证法二：用泰勒公式.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 .$$

因为 $f''(x) > 0$, 所以 $\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2 \ge 0$.

所 以 $f(x) = x + \dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2 \ge x$.