1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续,则$a=$____________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^{\cos 3x} f(t)dt\right]=$____________.

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$____________.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$, 则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

(2) 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 点 $x=1$ 处 的 ( )

(A) 左、右导数都存在 (B) 左导数存在,但右导数不存在 (C) 左导数不存在,但右导数存在 (D) 左、右导数都不存在

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解,且 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 ( )

(A) x_0 的某个领域内单调增加 (B) x_0 的某个领域内单调减少 (C) x_0 处 取 得 极 小 值 (D) x_0 处 取 得 极 大 值

(4) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的 渐 近 线 有 ( )

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，

则 有 （　）

(A) $N<P<M$ (B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$ (D) $P<M<N$

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分.)

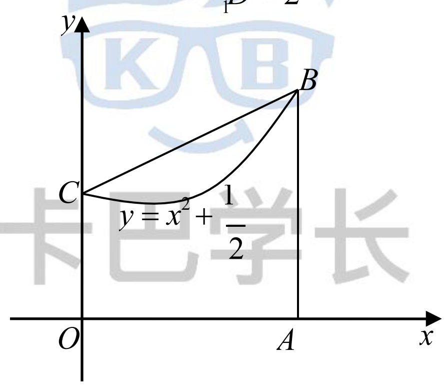
(1) 设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.

(4) 计算 $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

(5) 如图，设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 D，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1，点 A 的坐标为 $(a,0)$，$a>0$，证明：$\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.



四、(本题满分 9 分)

设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

五、(本题满分 9 分)

设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$，

(1) 求函数的增减区间及极值； (2) 求函数图像的凹凸区间及拐点； (3) 求其渐近线；

(4) 作出其图形.

六、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解, 其中常数 $a>0$.

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减, 证明：当 $0<\lambda<1$ 时, $\int_0^{\lambda} f(x)dx \ge \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

八、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】-2

【解析】$\dfrac{\sin 2x + e^{2ax}-1}{x}$ 在 $x \neq 0$ 时是初等函数,因而连续；要使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续,这样必有$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

由极限的四则混合运算法则和等价无穷小，$x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$ ； $e^{x-1} \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + e^{2ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{e^{2ax}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x} = 2+2a = a,$$

从而有$a=-2$.

(2)【答案】$\dfrac{(t+1)(6t+5)}{t}$

【解析】
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = 3t^2+5t+2,$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{(t+1)(6t+5)}{t}.$$

【相关知识点】复合函数求导法则：如果$u=g(x)$ 在点 x 可导,而 $y = f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导,则复合函数 $y = f\left[g(x)\right]$在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(3)【答案】$-3\sin 3x f(\cos 3x)$

【解析】原式= $f(\cos 3x)\cdot(\cos 3x)' = f(\cos 3x)\cdot(-\sin 3x)\cdot 3 = -3\sin 3x f(\cos 3x)$.

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式：

若 $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导,则

$$F'(t) = \beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right] - \alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$$

(4)【答案】$\dfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$, 其中C 为任意常数

【解析】本题利用不定积分的分部积分法求解. 显然是e^{x^2}先进入积分号,

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int x^2 d(e^{x^2})=\frac{1}{2}\left[x^2e^{x^2}-\int e^{x^2}d(x^2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C \qquad \text{其中}C\text{为任意常数.}$$

注：分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题,如果选择不当可能引起更繁杂的计算,最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结,积累经验.

【相关知识点】分部积分公式：假定$u=u(x)$与$v=v(x)$均具有连续的导函数,则

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx,\quad \text{或 者}\quad \int udv=uv-\int vdu.\ (5)$$

【答案】$(x-4)\cdot y^4=Cx$， C为任意常数

【解析】这是可分离变量的方程.

分离变量得$\dfrac{dx}{x(x-4)}+\dfrac{dy}{y}=0$,两项分别对 x 和对 y 积分得到

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|+\ln|y|=C_1,$$

化简有 $\dfrac{x-4}{x}\cdot y^4=C$, 即 $(x-4)\cdot y^4=Cx$， C为任意常数.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(A)

【解析】**方法 1**：将极限中的分子用泰勒—皮亚诺公式展开得

$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(ax+bx^2)$$
$$=(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2),$$

由假设,应该有$\begin{cases}1-a=0\\ -(\frac{1}{2}+b)=2\end{cases}$,故由此$a=1,\ b=-\frac{5}{2}$,故应选(A).

方法 2：用洛必达法则. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}$为“$\dfrac{0}{0}$”型的极限未定式,又分子分母在点0 处导数都存在,所以,

$$\text{原式左边}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}$$（若$1-a\neq0$，则原式极限为∞，必有$1-a=0$）

$$=-\frac{1+2b}{2}=2,\ \Rightarrow a=1,b=-\frac{5}{2}.$$

故应选(A).

(2) 【答案】(B)

【解析】**方法 1**：因 $f(x)=\frac{2}{3}x^3,(x\le1)\Rightarrow f(x)$ 左可导，$f'_-(1)=\left(\frac{2}{3}x^3\right)'_-\Big|_{x=1}=2$.

又 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1\neq f(1)\Rightarrow f(x)$ 不右连续$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 的右导数不存在，

故选(B).

方法 2：$f(1)=\frac{2}{3}$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1\neq f(1)$，

所以，$f(x)$ 在 $x=1$ 点不连续，故不可导，但左，右导数可能存在，这只需要用左，右导数定义进行验证.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=+\infty,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=2.$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 点左导数存在，但右导数不存在，故应选(B).

(3) 【答案】(C)

【解析】由于 $f(x)$ 满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$，当 $x=x_0$ 时，有

$$f''(x_0)+f'(x_0)=e^{\sin x_0}.$$

又由 $f'(x_0)=0$，有 $f''(x_0)=e^{\sin x_0}>0$，因而点 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，应选(C).

(4) 【答案】(B)

【解析】用换元法求极限，令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\pm\infty$ 时，$t\to0$，且有

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{t\to0}e^{t^2}\arctan\frac{t^2+t+1}{(1-t)(1+2t)}=\frac{\pi}{4},\ \lim_{x\to0}y=-\infty,$$

所以 y 轴和 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是曲线的两条渐近线.

而 $x=1$ 和 $x=-2$ 并非曲线的渐近线, 因当 $x=1$ 和 $x=-2$ 时, y 分别趋向于 $\pm\dfrac{\pi e}{2}$ 和 $\pm\dfrac{\pi e^{1/4}}{2}$. 故应选(B).

【相关知识点】渐近线的相关知识：

水平渐近线：若有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，则 $y=a$ 为水平渐近线；

铅直渐近线：若有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为铅直渐近线；

斜渐近线：若有 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 存在且不为 ∞，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

(5) 【答案】(D)

【解析】对于关于原点对称的区间上的积分, 应该关注被积函数的奇偶性.

由对称区间上奇偶函数积分的性质, 被积函数是奇函数, 积分区间关于原点对称, 则积分为 0, 故 $M=0$，且

由定积分的性质, 如果在区间 $[a,b]$ 上, 被积函数 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0\ \ (a<b)$.

所 以 $N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0$，　　　$P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=-N<0$.

因而 $P<M<N$，应选(D).

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 【解析】方程两边对 x 求导, 得 $y'=f'\cdot(1+y')$，两边再求导, 得

$$y''=f''\cdot(1+y')^2+f'\cdot y'',$$

由于一阶导数不等于 1, 所以 $1-f'\ne 0$.

以 $y'=\dfrac{f'}{1-f'}$ 代入并解出 y''，得 $y''=\dfrac{f''}{(1-f')^3}$.

【相关知识点】复合函数求导法则：

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(2) 【解析】用换元积分法.

观察被积函数的特点，可考虑引入三角函数化简.

令 $x^2=\sin t$，则 $2xdx=\cos tdt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，故

$$原式=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{32}\pi.$$

【相关知识点】定积分关于单三角函数的积分公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n为偶数\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n为奇数.\end{cases}$$

注：对于双阶乘 $n!!$ 的定义如下：当 n 为奇数时，$n!!=1\times3\times\cdots\times n$；当 n 为偶数时，$n!!=2\times4\times\cdots\times n$.

(3)【解析】**方法 1**：用三角函数公式将 $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$ 展开，再化为重要极限 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 的形式，利用等价无穷小因子替换，即 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$，从而求出极限.

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

方法 2：先取自然对数，求出极限后再用恒等式 $e^{\lim_{x\to\infty}\ln f(x)}=\lim_{x\to\infty}f(x)$.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=4,$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}=e^4$.

(4)【解析】**方法 1**：利用三角函数的二倍角公式 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，并利用换元积分，结合拆项法求积分，得

$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\int\frac{\sin xdx}{2\sin^2 x(\cos x+1)}\underline{\underline{\cos x=u}}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}du$$

（$\because\ \sin^2 x=1-\cos^2 x$）

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{(1+u)+(1-u)}{(1-u)(1+u)^2}du=-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right)du$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{(1+u)}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C,$$

其中C为任意常数.

方法 2：换元$\cos x=u$后, 有

$$\text{原式}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin xdx}{2\sin^2 x(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2}.$$

用待定系数法将被积函数分解:

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}$$

$$=\frac{(A-B)u^2+(2A-D)u+(A+B+D)}{(1-u)(1+u)^2},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\2A-D=0\\A+B+D=1\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{4},D=\frac{1}{2}.$$

于是, 原式$=-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right)du=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right]+C$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C.$$

(5) 【解析】对梯形$OABC$的面积为D, 可用梯形面积公式$\frac{h}{2}(a+b)$, 其中h为梯形的高, a、b分别为上底和下底长度. 对于曲边梯形$OABC$的面积则用积分式求解.

$$D=\frac{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+a^2)}{2}a=\frac{a(1+a^2)}{2},$$

$$D_1=\int_0^a(\frac{1}{2}+x^2)dx=\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a=\frac{a(3+2a^2)}{6}.$$

由 于 $1+a^2<\frac{3}{2}+a^2$, 所以 $\frac{1+a^2}{\frac{3}{2}+a^2}<1$, 由此,

$$\frac{D}{D_1}=\frac{\frac{a(1+a^2)}{2}}{\frac{a(3+2a^2)}{6}}=\frac{3(1+a^2)}{3+2a^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1+a^2}{\frac{3}{2}+a^2}<\frac{3}{2}.$$

四、(本题满分 9 分)

【解析】方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 的解即为 $\varphi(x)=kx^3-x^2+1$ 的零点.

要证明方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解, 只需要证明 $\varphi(x)$ 是单调函数, 且它的函数图像仅穿过 x 轴一次就可以了. 以下是证明过程.

对 $\varphi(x)$ 求一阶导数, 有 $\varphi'(x)=3kx^2-2x=x(3kx-2)$.

当 $k\le 0$ 时, $\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 单调减少, $\varphi(0)=1>0, \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty$, $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 有唯一的零点;

当 $k>0$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3k})$ 单调减少, 在 $(\frac{2}{3k},+\infty)$ 单调增加, $\varphi(\frac{2}{3k})=1-\frac{4}{27k^2}$, 而 $\varphi(0)=1>0, \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, 当且仅当最小值 $\varphi(\frac{2}{3k})=0$ 时, $\varphi(x)$ 才在 $x>0$ 有唯一零点, 这时应该有 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

总之, 当 $k\le 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, 原方程有唯一实根.

五、(本题满分 9 分)

【解析】求函数的增减区间一般先求出函数的不连续点和驻点, 根据这些点将函数的定义域分成不同区间, 然后根据 y' 在此区间上的正负来判断该区间上函数的增减性以及极值点；根据 y'' 的正负判定区间的凹凸性；求渐近线时除判定是否存在水平或垂直渐近线外, 还要注意有没有斜渐近线. 作函数图形时要能综合(1)、(2)、(3)所给出的函数属性, 尤其注意渐近线、拐点、极值点和零点.

$$y = x + \frac{4}{x^2}, y' = 1 - \frac{8}{x^3}, y'' = \frac{24}{x^4} > 0 .$$

无定义点： $x = 0$, 驻点： $x = 2$.

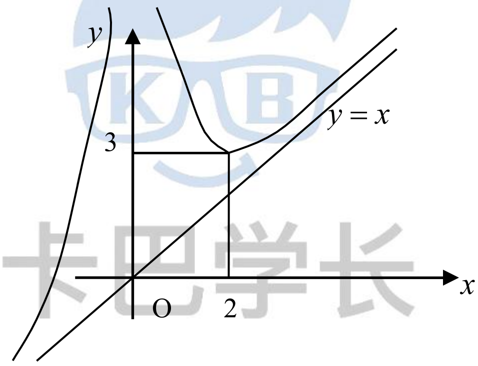
	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	无定义	−	0	+
y''	+	无定义	+	+	+
y	上升	无定义	下降	极小	上升

函数在$(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ 单调增加, 在$(0, 2)$ 单调减少, 在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 凹, 在 $x = 2$ 取极小值 $y|_{x=2} = 3$；

由于 $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线.

由 于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = 1, \lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 0$, 所以 $y = x$ 是斜渐近线.

粗略草图如下：



【相关知识点】渐近线的相关知识：

水平渐近线：若有$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, 则 $y = a$ 为水平渐近线；

铅直渐近线：若有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, 则 $x = a$ 为铅直渐近线；

斜渐近线：若有 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax]$ 存在且不为∞, 则 $y = ax + b$ 为斜渐近线.

六、(本题满分 9 分)

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程, 对应的齐次方程的特征方程$r^2 + a^2 = 0$ 有两个根为$r_1, r_2 = \pm ai$.

当 $a \neq 1$时, 非齐次方程的特解应设为 $Y = A\sin x + B\cos x$.

代入方程可以确定 $A=\dfrac{1}{a^2-1}, B=0, Y=\dfrac{\sin x}{a^2-1}$.

当 $a=1$ 时，应设 $Y=xA\sin x+xB\cos x$，

代入方程可以确定 $A=0, B=-\dfrac{1}{2}, Y=-\dfrac{x}{2}\cos x$.

由此，所求的通解为

$$\text{当 } a\neq 1\text{时，} y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\frac{\sin x}{a^2-1};$$

$$\text{当} a=1 \text{ 时，} y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{x}{2}\cos x.$$

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$，可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数，方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$，在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2；

分三种情况：

① 两个不相等的实数根 r_1, r_2，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

② 两个相等的实数根 $r_1=r_2$，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$；

③ 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m = \max\{l,n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为0 或1.

七、（本题满分 9 分）

【解析】方法一：用积分比较定理.

首先需要统一积分区间：换元, 令 $x=\lambda t$, 则 $\int_0^\lambda f(x)dx = \lambda\int_0^1 f(\lambda t)dt$,

由此
$$\int_0^\lambda f(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x)dx = \lambda\int_0^1[f(\lambda x)-f(x)]dx.$$

因为 $f(x)$ 递减而 $\lambda x<x$, 所以 $f(\lambda x)\ge f(x)$, 上式的右端大于零, 问题得证.

方法二：用积分中值定理.

为分清两中值的大小, 需要分别在 $(0,\lambda),(\lambda,1)$ 两区间内用积分中值定理：
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\lambda f(x)dx + \int_\lambda^1 f(x)dx,$$

由此,
$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x)dx &= (1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)dx - \lambda\int_\lambda^1 f(x)dx\\ &= (1-\lambda)\cdot\lambda f(\xi_1) - \lambda\cdot(1-\lambda)f(\xi_2)\\ &= (1-\lambda)\cdot\lambda[f(\xi_1)-f(\xi_2)],\end{aligned}$$

其中, $0<\xi_1<\lambda<\xi_2<1$；又因 $f(x)$ 递减, $f(\xi_1)\ge f(\xi_2)$. 上式的右端大于零, 问题得证.

方法三：作为函数不等式来证明. 令
$$\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x)dx, \qquad \lambda\in[0,1].$$

则 $\varphi'(\lambda) = f(\lambda) - \int_0^1 f(x)dx$.

由积分中值定理, 有 $\varphi'(\lambda) = f(\lambda)-f(\xi)$, 其中 $\xi\in(0,1)$ 为常数.

由 $f(\lambda)$ 递减, $\lambda=\xi$ 为唯一驻点, 且 $\varphi'(\lambda)$ 在 $\lambda=\xi$ 由正变负, $\lambda=\xi$ 是 $\varphi(\lambda)$ 的极大值点也是最大值点；由此, 最小点必为端点 $\lambda=0$ 或1. 从而有
$$\varphi(\lambda)\ge\varphi(0)=\varphi(1)=0,\ 0<\lambda<1.$$

命题得证.

【相关知识点】积分上限的函数的求导公式：

若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则
$$F'(t) = \beta'(t)\cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t)\cdot f[\alpha(t)].$$

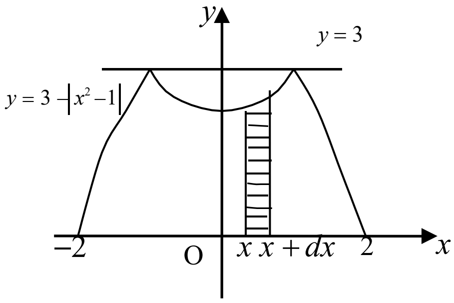
八、（本题满分 9 分）

【解析】如右图所示, 曲线左右对称,

与 x 轴的交点是$(-2,0),(2,0)$.

只计算右半部分即可. 作垂直分割,

相应于$[x,x+dx]$的小竖条的体积微元：



$$dV=\pi\left[3^2-(3-y)^2\right]dx=\left[3^2-(x^2-1)^2\right]dx$$

$$=\pi(8+2x^2-x^4)dx,\ 0\le x\le 2,$$

于是　$V=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)dx=\dfrac{448}{15}\pi$.