1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$____________.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程$\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

(3) 设 $F(x)=\int_1^x (2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$,则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是____________.

(4) $\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$____________.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点$(0,-\dfrac{1}{2})$,且其上任一点(x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$,则

$f(x)=$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x\to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是 ( )

(A) 无 穷 小 (B) 无 穷 大

(C) 有界的,但不是无穷小 (D) 有界的,但不是无穷大

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则 在 点 $x=1$ 处 函 数 $f(x)$ ( )

(A) 不 连 续 (B) 连 续 , 但 不 可 导(C) 可导,但导数不连续 (D) 可导,且导数连续

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x<1,\\ 1, 1\le x\le 2,\end{cases}$ 设$F(x)=\int_1^x f(t)dt\ (0\le x\le 2)$, 则 $F(x)$ 为 ( )

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, 0\le x<1\\ x, 1\le x\le 2\end{cases}$

(B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x<1\\ x, 1\le x\le 2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, 0\le x<1\\ x-1, 1\le x\le 2\end{cases}$

(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x<1\\ x-1, 1\le x\le 2\end{cases}$

(4) 设常数$k>0$,函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内 零 点 个 数 为 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 （ ）

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$ (B) $f'(x)<0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$ (D) $f'(x)>0, f''(x)>0$

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分.)

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}dx$.

(4) 求 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

(5) 求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

五、(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出该最小值.

七、(本题满分 6 分)

设 $x>0$，常数 $a>e$，证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \dfrac{Ma^2}{2}$，其中 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分.)

(1)【答案】0

【解析】这是个 $0\cdot\infty$ 型未定式，可将其等价变换成 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，从而利用洛必达法则进行求解.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}x=0.$$

(2)【答案】$\dfrac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$

【解析】这是一个由复合函数和隐函数所确定的函数，将方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 两边对 x 求导，得

$$\cos(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy')+e^x-y^2-2xyy'=0,$$

化简得 $y'=\dfrac{y^2-e^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$.

【相关知识点】复合函数求导法则：

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

（3）【答案】$0<x\le\frac{1}{4}$

【解析】由连续可导函数的导数与0 的关系判别函数的单调性.

将函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$, 两边对 x 求导, 得 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

若函数 $F(x)$ 严格单调减少, 则 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$, 即 $\sqrt{x}<\frac{1}{2}$.

所以函数 $F(x)$ 单调减少区间为 $0<x\le\frac{1}{4}$.

【相关知识点】函数的单调性：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

（4）【答案】$2\cos^{-1/2}x+C$

【解析】$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos x}}dx=\int\sin x\cos^{-\frac{3}{2}}xdx$

$$=-\int\cos^{-\frac{3}{2}}xd\cos x=2\cos^{-\frac{1}{2}}x+C.$$

（5）【答案】$\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

【解析】这是微分方程的简单应用.

由题知 $\frac{dy}{dx}=x\ln(1+x^2)$, 分离变量得 $dy=x\ln(1+x^2)dx$, 两边对 x 积分有

$$y=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(x^2+1).$$

由分部积分法得

$$\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)d(x^2+1)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int(1+x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\int xdx$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$$

因为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,-\frac{1}{2})$, 故 $C=-\frac{1}{2}$, 所以所求曲线为

$$y=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】因为当 $x\to 0$ 时, $\sin\frac{1}{x}$ 是振荡函数,所以可用反证法.

若 取 $x_{1k}=\frac{1}{k\pi}$, 则 $\frac{1}{x_{1k}^2}\sin\frac{1}{x_{1k}}=(k\pi)^2\sin k\pi=0$,

$$x_{2k}=\frac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi},\text{则}\frac{1}{x_{2k}^2}\sin\frac{1}{x_{2k}}=(2k+\frac{1}{2})^2\pi^2,(k=1,2,\dots,)\ .$$

因此,当 $k\to\infty$ 时,有 $x_{1k}\to 0$ 及 $x_{2k}\to 0$,但变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 或等于 0 或趋于$+\infty$,这表明当 $x\to 0$ 时它是无界的,但不是无穷大量,即(D)选项正确.

(2)【答案】(A)

【解析】利用函数连续定义判定,即如果函数在 x_0 处连续,则有

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\lim_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)\ .$$

由题可知

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x+1)=-2\ .$$

因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左右极限不相等,故在 $x=1$ 处不连续,因此选(A).

(3)【答案】(D)

【解析】这是分段函数求定积分.

当$0\le x<1$时, $0\le x\le t\le 1$, 故 $f(t)=t^2$, 所以

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x=\frac{1}{3}(x^3-1)\ .$$

当$1\le x\le 2$ 时, $1\le t\le x\le 2$, 故 $f(t)=1$, 所以

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x 1dt=\left[t\right]_1^x=x-1\ .$$

应选(D).

(4)【答案】(B)

【解析】判定函数 $f(x)$ 零点的个数等价于判定函数 $y=f(x)$ 与 x 的交点个数.

对函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 两边对 x 求导, 得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$.

令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=e$，

即 $\begin{cases} f'(x)>0, 0<x<e; & f(x)\text{严格单调增加}, \\ f'(x)<0, e<x<+\infty; & f(x)\text{严格单调减少}, \end{cases}$

所以 $x=e$ 是极大值点，也是最大值点，最大值为 $f(e)=\ln e-\dfrac{e}{e}+k=k>0$.

又因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\dfrac{x}{e}+k)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-\dfrac{x}{e}+k)=-\infty \end{cases}$，

由连续函数的介值定理知在 $(0,e)$ 与 $(e,+\infty)$ 各有且仅有一个零点(不相同).

故函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为 2，选项(B)正确.

(5)【答案】(C)

【解析】**方法一**：由几何图形判断.

由 $f(x)=-f(-x)$，知 $f(x)$ 为奇函数，图形关于原点对称；

在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，$f(x)$ 图形单调增加且向上凹，

根据图可以看出 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内增加而凸，$f'(x)>0, f''(x)<0$，选(C).

方法二：用代数法证明.

对恒等式 $f(x)=-f(-x)$ 两边求导，得

$$f'(x)=f'(-x), f''(x)=-f''(-x).$$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $-x\in(0,+\infty)$，所以

$$f'(x)=f'(-x)>0, f''(x)=-f''(-x)<0,$$

故应选(C).

三、(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分.)

(1)【解析】$y'=\left\{\sin[f(x^2)]\right\}'=\cos[f(x^2)]\cdot f'(x^2)\cdot 2x$，

$$\begin{aligned} y''&=\left\{\cos[f(x^2)]\cdot f'(x^2)\cdot 2x\right\}' \\ &=\left\{\cos[f(x^2)]\right\}'\cdot f'(x^2)\cdot 2x+\cos[f(x^2)]\cdot\left[f'(x^2)\right]'\cdot 2x \\ &\quad+\cos[f(x^2)]\cdot f'(x^2)\cdot(2x)' \end{aligned}$$

$$=-\sin[f(x^2)]\cdot[f'(x^2)]^2\cdot(2x)^2+\cos[f(x^2)]\cdot f''(x^2)\cdot(2x)^2$$

$$+\cos[f(x^2)]\cdot f'(x^2)\cdot 2.$$

【相关知识点】复合函数求导法则：

如果$u=g(x)$在点 x 可导, 而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(2)【解析】应先化简再求函数的极限,

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+100}+x)\cdot(\sqrt{x^2+100}-x)}{\sqrt{x^2+100}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+100}-1}.$$

因为 $x<0$, 所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+100}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1}=\frac{100}{-1-1}=-50.$$

(3)【解析】先进行恒等变形, 再利用基本积分公式和分部积分法求解.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sec^2 x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\tan x$$

$$=\frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-0)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}d\cos x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}[\ln(\cos\frac{\pi}{4})-\ln(\cos 0)]=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

(4)【解析】用极限法求广义积分.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)-1}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}[(1+x)^{-2}-(1+x)^{-3}]d(1+x)$$

$$=\left[-(1+x)^{-1}+\frac{1}{2}(1+x)^{-2}\right]_0^{+\infty}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}\right]_0^b$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{2b+1}{2(b+1)^2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(5)【解析】所给方程是一阶线性非齐次微分方程, 其标准形式是

$$y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1},\quad x^2-1\neq 0,$$

通 解 为 $y=e^{\int -\frac{2x}{x^2-1}dx}[\int\frac{}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C]$

$$=e^{-\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}}\left[\int\frac{}{x^2-1}e^{\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int\cos x dx+C\right]=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

代入初始条件 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $\frac{\sin 0+C}{0^2-1}=1$, 所以 $C=-1$. 所求特解为 $y=\frac{\sin x-1}{x^2-1}$.

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解公式为:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right),$$ 其中 C 为常数.

四、(本题满分 9 分)

【解析】要确定常数 α,β,γ, 只需将特解代入原微分方程后, 用比较系数法即得.

对于特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$, 有

$$y'=2e^{2x}+e^x+(1+x)e^x=2e^{2x}+(2+x)e^x,$$

$$y''=\left[2e^{2x}+(2+x)e^x\right]'=4e^{2x}+e^x+(2+x)e^x=4e^{2x}+(3+x)e^x,$$

代入方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$, 得恒等式

$$\left[4e^{2x}+(3+x)e^x\right]+\alpha\left[2e^{2x}+(2+x)e^x\right]+\beta\left[e^{2x}+(1+x)e^x\right]=\gamma e^x,$$

化简得

$$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x\equiv\gamma e^x,$$

比较同类项系数, 得

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma,\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

解之得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$.

于是原方程为 $y''-3y'+2y=-e^x$，所对应的齐次微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解之得 $r_1=1, r_2=2$.

所以微分方程 $y''-3y'+2y=-e^x$ 的通解为

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+y^*=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{2x}+(1+x)e^x=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x.$$

五、（本题满分 9 分）

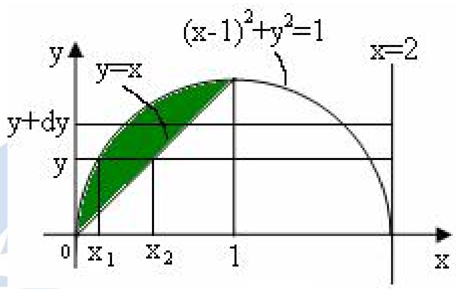
【解析】利用定积分求旋转体的体积，用微元法.

$$x^2+y^2\le 2x \text{ 等价于} (x-1)^2+y^2\le 1.$$

解法一：考虑对 y 的积分，则边界线为

$x_1=1-\sqrt{1-y^2}$ 与 $x_2=y(0\le y\le 1)$，

如右图所示. 当 $y\to y+dy$ 时，



$$\begin{aligned} dV&=\pi(2-x_1)^2dy-\pi(2-x_2)^2dy\\ &=\pi\left[(2-1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2\right]dy\\ &=2\pi\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]dy. \end{aligned}$$

所以 $V=2\pi\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]dy$.

对于 $\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy$，令 $y=\sin t$，则 $dy=\cos tdt$，所以

$$\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4};$$

对于 $\int_0^1(1-y)^2dy=-\int_0^1(1-y)^2d(1-y)=-\left[\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$，

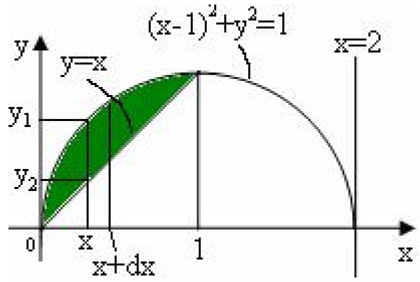
所以 $V=2\pi\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]dy=2\pi\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\right)$.

解法二：取 x 为积分变量，则边界线为

$y_1=\sqrt{2x-x^2}$ 与 $y_2=x(0\le x\le 1)$，

如右图所示.

当 $x\to x+dx$ 时，



$$dV = 2\pi(2-x)(y_1-y_2)dx$$
$$= 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx,$$

所以$V = 2\pi\int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$.

令 $x-1=t$，则 $x=1+t, dx=dt$，所以

$$\int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$$
$$= \int_{-1}^0 (1-t)\left[\sqrt{2(1+t)-(1+t)^2}-(1+t)\right]dt = \int_{-1}^0\left[\sqrt{1-t^2}-t\sqrt{1-t^2}+t^2-1\right]dt.$$

再令$t=\sin\theta$，则$dt=\cos\theta\, d\theta$，

所以 $\int_{-1}^0\left[\sqrt{1-t^2}-t\sqrt{1-t^2}+t^2-1\right]dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta-1)\cos\theta\, d\theta$

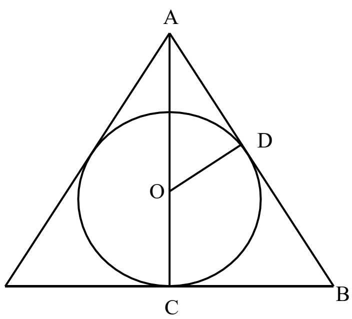
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\theta\cos\theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1+\cos 2\theta)d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta\, d\cos\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\theta\, d\sin\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0$$
$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

所以 $V = 2\pi\int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx = 2\pi(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}).$

六、(本题满分 9 分)

【解析】这是一个将立体几何问题转化为函数求最值的问题.

设圆锥底半径为R，如图，$BC=R, AC=h, OD=r$.



由$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{OD}{AD}, AD=\sqrt{OA^2-OD^2}$，有

$$\frac{R}{h}=\frac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}} \Rightarrow R=\frac{hr}{\sqrt{h^2-2hr}}.$$

于是圆锥体积

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{h^2}{h-2r}\ (2r<h<+\infty).$$

对上式两端对h求导，并令$V'=0$，得

$$V'_h=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{2h(h-2r)-h^2}{(h-2r)^2}=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2}=0,$$

得唯一驻点$h=4r$，且

$$\begin{cases} 2r<h<4r, V'<0 \\ 4r<h<+\infty, V'>0 \end{cases},$$

所以$h=4r$为极小值点也是最小值点，最小体积$V(4r)=\frac{8}{3}\pi r^3$.

七、（本题满分 9 分）

【解析】首先应简化不等式，从中发现规律.

当 $x>0$，常数$a>e$时，原不等式两边取自然对数可化为

$$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a \text{ 或 } \frac{\ln(a+x)}{a+x}<\frac{\ln a}{a}.$$

证法一：令 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$，则 $f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}$.

由$a>e, x>0$，知$\ln a>1, \frac{a}{a+x}<1$，故 $f'(x)>0(x>0)$.

从而 $f(x)$ 为严格单调递增函数，且

$$f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)>f(0)=a\ln a-a\ln a=0,(x>0)$$

即 $(a+x)\ln a-a\ln(a+x)>0$，

所 以 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

证法二：令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x>a>e$ 时，有 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，

所以函数在 $x>a>e$ 为严格单调递减函数，即 $f(x+a)<f(a)$，

所以有 $\frac{\ln(a+x)}{a+x}<\frac{\ln a}{a}$，

即 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、（本题满分 9 分）

【解析】**证法一**：用微分中值定理.

对任意给定的 $x\in[0,a]$，由拉格朗日中值定理，得

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)x,(0<\xi<x)$$

由 $f(0)=0$，知 $f(x)=f'(\xi)x$. 因为 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$，所以

$$|f(x)|=|f'(\xi)|x\le Mx,$$

将两边从$0\to a$ 做 x 的定积分, 有

$$\int_0^a|f(x)|dx\le M\int_0^a xdx=\frac{Ma^2}{2}.$$

由定积分的基本性质可知 $\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\int_0^a|f(x)|dx\le\dfrac{Ma^2}{2}$.

证法二：用牛顿-莱布尼茨公式.

对任意给定的 $x\in[0,a]$, 以及 $f(0)=0$, 可知

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=f(x),$$

从 而 $|f(x)|\le\int_0^x|f'(t)|dt\le Mx$,

以下同证法一.

证法三：分部积分法.

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(x)d(x-a)=[f(x)(x-a)]\Big|_0^a+\int_0^a(a-x)f'(x)dx$$

$$=[f(a)(a-a)-f(0)(0-a)]+\int_0^a(a-x)f'(x)dx=\int_0^a(a-x)f'(x)dx.$$

所以

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right|=\left|\int_0^a(a-x)f'(x)dx\right|\le\int_0^a(a-x)\left|f'(x)\right|dx\le M\int_0^a(a-x)dx$$

$$=M\left[ax-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a=\frac{1}{2}Ma^2.$$