1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设$\begin{cases} x = f(t)-\pi, \\ y = f(e^{3t}-1), \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0)\neq 0$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$____________.

(2) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为____________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x} =$____________.

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)} =$____________.

(5) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$____________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x\to 0$ 时, $x-\sin x$ 是 x^2 的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$,则 ( )

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x\le 0 \\ -(x^2+x), & x>0 \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2+x), & x<0 \\ -x^2, & x\ge 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x^2-x, & x>0 \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2-x, & x<0 \\ x^2, & x\ge 0 \end{cases}$

(3) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ( )

(A) 等于 2 (B) 等于 0

(C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

(4) 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t^2)dt$,则 $F'(x)$ 等于 ( )

(A) $f(x^4)$ (B) $x^2 f(x^4)$ (C) $2xf(x^4)$ (D) $2xf(x^2)$

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 ( )

(A) $1+\sin x$ (B) $1-\sin x$

(C) $1+\cos x$ (D) $1-\cos x$

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$ 所确定,求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ 的值.

(3) 求 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(4) 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$.

(5) 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x},\ \ x\geq 0\end{cases}$ ，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

七、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l ,使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

八、(本题满分 9 分)

已知 $f''(x)<0,f(0)=0$ ，试证：对任意的二正数 x_1 和 x_2 ，恒有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

成立.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】3

【解析】由复合函数求导法则可得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$，于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=3$.

【相关知识点】复合函数求导法则:如果$u=g(x)$ 在点 x 可导,而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导,则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(2)【答案】$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

【解析】令 $y'=1-2\sin x=0$，得$[0,\frac{\pi}{2}]$ 内驻点 $x=\frac{\pi}{6}$.

因为只有一个驻点,所以此驻点必为极大值点,与端点值进行比较,求出最大值.

又 $y(0)=2$， $y(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$， $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$，

可见最大值为$y(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

(3)【答案】0

【解析】由等价无穷小,有 $x\to 0$ 时, $1-\sqrt{1-x^2}\sim -\frac{1}{2}(-x^2)=\frac{1}{2}x^2$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x-\cos x},$$

上式为“$\frac{0}{0}$”型的极限未定式,又分子分母在点0 处导数都存在,由洛必达法则,有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x+\sin x}=0 .$$

(4)【答案】 $\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】令$b\to+\infty$，

原式$=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx$ (分项法)

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^b\frac{dx^2}{x^2+1}$ (凑微分法)

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{2\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2=\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2 .$$

(5)【答案】$\frac{e}{2}-1$

【解析】联立曲线和直线的方程，解得两曲线的交点为$(0,0),(1,e)$，则所围图形面积为

$S=\int_0^1(ex-xe^x)dx$，再利用分部积分法求解，得

$$S=\left(\frac{e}{2}x^2-xe^x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=\frac{e}{2}-1 .$$

注：分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题，如果选择不当可能引起更繁杂的计算，最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结，积累经验.

【相关知识点】分部积分公式：假定$u=u(x)$与$v=v(x)$均具有连续的导函数，则

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx,\ \text{或 者}\ \int udv=uv-\int vdu.$$

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分.)

(1)【答案】(B)

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$为“$\frac{0}{0}$”型的极限未定式，又分子分母在点0处导数都存在，连续运用两次洛必达法则，有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$，故选(B).

【相关知识点】无穷小的比较：

设在同一个极限过程中，$\alpha(x),\beta(x)$为无穷小且存在极限 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$，

(1) 若$l\neq0$，称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若$l=1$，称$\alpha(x),\beta(x)$在该极限过程中为等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

(3) 若$l=0$，称在该极限过程中$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小，记为$\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$.

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不存在(不为$\infty$)，称$\alpha(x),\beta(x)$不可比较.

(2)【答案】(D)

【解析】直接按复合函数的定义计算.

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\le0\\(-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\x^2, & x\ge0.\end{cases}$$

所以应选(D).

(3)【答案】(D)

【解析】对于函数在给定点 x_0 的极限是否存在,需要判定左极限 $x \to x_0^-$ 和右极限 $x \to x_0^+$ 是否存在且相等,若相等,则函数在点 x_0 的极限是存在的.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty.$$

$0\neq\infty$,故当 $x\to 1$ 时函数没有极限,也不是∞.故应选(D).

(4)【答案】(C)

【解析】 $F'(x)=\left[\int_0^{x^2} f(t^2)dt\right]'=f[(x^2)^2](x^2)'=2xf(x^4)$,

故选(C).

【相关知识点】对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导,则

$$F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$$

(5)【答案】(B)

【解析】由 $f(x)$ 的导函数是$\sin x$,即 $f'(x)=\sin x$,得

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \sin xdx=-\cos x+C,\ \text{其中}C\text{为任意常数}.$$

所以 $f(x)$ 的原函数

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(-\cos x+C)dx=-\sin x+C_1x+C_2,\ \text{其中}C_1,C_2\text{为任意常数}.$$

令 $C_1=0$, $C_2=1$ 得 $F(x)=1-\sin x$.故选(B).

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分.)

(1)【答案】$e^{-\frac{3}{2}}$

【解析】此题考查重要极限: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

将函数式变形,有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

(2)【答案】$2e^2$

【解析】函数 $y = y(x)$ 是一个隐函数,即它是由一个方程确定,写不出具体的解析式.

方法 1：在方程两边对 x 求导,将 y 看做 x 的函数,得

$$y' - e^y - xe^y \cdot y' = 0,\quad 即\quad y' = \frac{e^y}{1-xe^y},$$

把 $x=0, y=1$ 代入可得 $y'(0)=e$.

两边再次求导,得

$$y'' = \frac{e^y y'(1-xe^y) + e^y(e^y + xe^y y')}{(1-xe^y)^2},$$

把 $x=0, y=1$, $y'(0)=e$ 代入得 $y''(0) = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 2e^2$.

方法 2：方程两边对 x 求导,得 $y' - e^y - xe^y y' = 0$;

再次求导可得 $y'' - e^y y' - (e^y y' + xe^y y'^2 + xe^y y'') = 0$,

把 $x=0, y=1$ 代入上面两式,解得 $y'(0)=e$, $y''(0) = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 2e^2$.

【相关知识点】1. 复合函数求导法则:如果$u=g(x)$在点 x 可导,而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

2. 两函数乘积的求导公式:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

3. 分式求导公式: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

(3)【答案】$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C$ 其中C为任意常数.

【解析】**方法 1**：积分的凑分法结合分项法,有

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C$$ 其中 C 为任意常数.

方法 2：令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t dt$，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\tan^3 t\sec t dt=\int\tan^2 t d(\sec t)=\int(\sec^2 t-1)d(\sec t)$$

$$=\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C$$，其中 C 为任意常数.

方法 3：令 $t=x^2$，则 $x=\sqrt{t}, dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}$，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$$ 此后方法同方法 1，积分的凑分法结合分项法

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+t}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C$$，其中 C 为任意常数.

(4)【答案】$4(\sqrt{2}-1)$

【解析】注意 $\sqrt{f(x)^2}=|f(x)|\neq f(x)$，不要轻易丢掉绝对值符号；绝对值函数的积分实际上是分段函数的积分.

由二倍角公式 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$，则有

$$1-\sin\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

所以 $$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= 2\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left(-\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 4(\sqrt{2} - 1).$$

(5)【答案】 $y = C\sqrt{|x|} - \frac{1}{5}x^3$，其中$C$为任意常数

【解析】所给方程为一阶线性非齐次方程，其标准形式为 $y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2}x^2$.

由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$y = e^{\int \frac{1}{2x}dx}\left(\int -\frac{1}{2}x^2 e^{-\int \frac{1}{2x}dx}dx + C\right)$$

$$= C\sqrt{|x|} - \frac{1}{5}x^3 \text{ 其中}C\text{为任意常数.}$$

【相关知识点】一阶线性非齐次方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)，\text{其中}C\text{为任意常数.}$$

四、(本题满分 9 分)

【解析】分段函数的积分应根据积分可加性分段分别求积分. 另外，被积函数的中间变量非积分变量，若先作变量代换，往往会简化计算.

令 $x - 2 = t$，则$dx = dt$.当 $x = 1$ 时，$t = -1$；当 $x = 3$ 时，$t = 1$，于是

$$\int_1^3 f(x-2)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt \xlongequal{\text{分段}} \int_{-1}^0 (1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt$$

$$= \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_{-1}^0 - e^{-t}\Big|_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

五、(本题满分 9 分)

【解析】所给方程为常系数的二阶线性非齐次方程，对应的齐次方程的特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 有两个根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$，而非齐次项 $xe^{\alpha x}, \alpha = 1 = r_1$ 为单特征根，因而非齐次方程有如下形式的特解$Y = x(ax+b)e^x$，

代入方程可得$a = -\frac{1}{2}, b = -1$，所求解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{x}{2}(x+2)e^x，\text{其中}C_1, C_2\text{ 为任意常数.}$$

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解, 则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2；

分三种情况：

① 两个不相等的实数根 r_1, r_2, 则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

② 两个相等的实数根 $r_1=r_2$, 则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$;

③ 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, 则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\left\{l,n\right\}$, 而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为0 或1.

六、（本题满分 9 分）

【解析】由于 $y=\ln(1-x^2)$,

$$y'=\frac{-2x}{1-x^2},\ 1+y'^2=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2},\ ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1+x^2}{1-x^2}dx,\ (0\le x\le\frac{1}{2}),$$

所以
$$s=\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^{1/2}\frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}dx$$

$$=\int_0^{1/2}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x}dx+\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx-\frac{1}{2}$$

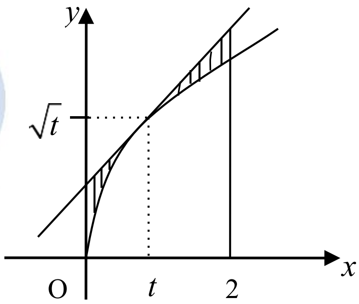
$$=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{1/2}-\frac{1}{2}=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

【相关知识点】平面曲线弧长计算：已知平面曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的显式表示为 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$，则弧微分为 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数.

七、(本题满分 9 分)

【解析】过曲线上已知点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，其中当 $y'(x_0)$ 存在时，$k=y'(x_0)$.

如图所示，设曲线上一点 $(t,\sqrt{t})$ 处的切线方程为



$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t),$$

化 简 即 得 $y=\dfrac{x}{2\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

面积 $$S(t)=\int_0^2\left[\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}\right)-\sqrt{x}\right]dx=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4}{3}\sqrt{2},$$

其一阶导数 $S'(t)=-\dfrac{1}{2}t^{-3/2}+\dfrac{1}{2}t^{-1/2}=\dfrac{t-1}{2t\sqrt{t}}$.

令 $S'(t)=0$ 解得唯一驻点 $t=1$，而且 S' 在此由负变正，即 $S(t)$ 在 $(-\infty,1]$ 单调递减，在 $[1,+\infty)$ 单调递增，在此过程中 $S(t)$ 在 $t=1$ 时取极小值也是最小值，所以将 $t=1$ 代入先前所设的切线方程中，得所求切线方程为 $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

八、(本题满分 9 分)

【解析】**证法一：**用拉格朗日中值定理证明. 不妨设 $x_2>x_1>0$，要证的不等式是

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0).$$

在$[0, x_1]$上用中值定理，有 $f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1$，$0<\xi<x_1$，

在$[x_2, x_1+x_2]$上用中值定理，又有 $f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1$，$x_2<\eta<x_1+x_2$，

由 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 单调减，而$\xi<x_1<x_2<\eta$，有 $f'(\xi)>f'(\eta)$，所以

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1),$$

即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法二：用函数不等式来证明.

要 证 $f(x_1+x)<f(x_1)+f(x), x>0$.

令辅助函数$\varphi(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1+x)$，则$\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$.

由 $f''(x)<0, f'(x)$ 单调减，$f'(x)>f'(x_1+x), \varphi'(x)>0$，由此，

$$\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0(x>0).$$

改 x 为 x_2 即得证.

【相关知识点】拉格朗日中值定理：

如果函数 $f(x)$ 满足在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立.