1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$, 则 $dy=$____________.

(2) 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是____________.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$____________.

(4) 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米每秒作直线运动, 则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于____________米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$____________.

二、选择题(每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切, 其中 a,b 是常数, 则 ( ) (A) $a=0,b=-2$ (B) $a=1,b=-3$

(C) $a=-3,b=1$ (D) $a=-1,b=-1$

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le 2$, 则 ( )

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{3}, & 1<x\le 2\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ \frac{x^2}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, $x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点, 则 ( ) (A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点 (B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点

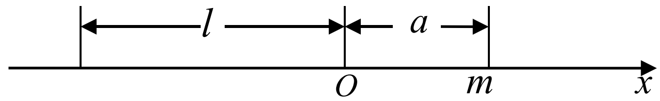
(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点 (D) 对一切 x 都有 $f(x) \le f(x_0)$

(4) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ( )

(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(5) 如图, x 轴上有一线密度为常数 μ, 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a, 已知引力系数为 k, 则质点和细杆之间引力的大小为 ( )



(A) $\int_{-l}^{0}\dfrac{km\mu}{(a-x)^2}dx$ (B) $\int_{0}^{l}\dfrac{km\mu}{(a-x)^2}dx$

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\dfrac{km\mu}{(a+x)^2}dx$ (D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\dfrac{km\mu}{(a+x)^2}dx$

三、(每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 设 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_1^4 \dfrac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

(4) 求 $\int x\sin^2 x dx$.

(5) 求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明：当 $x>1$ 时, 有不等式 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$ 成立.

五、(本题满分 9 分)

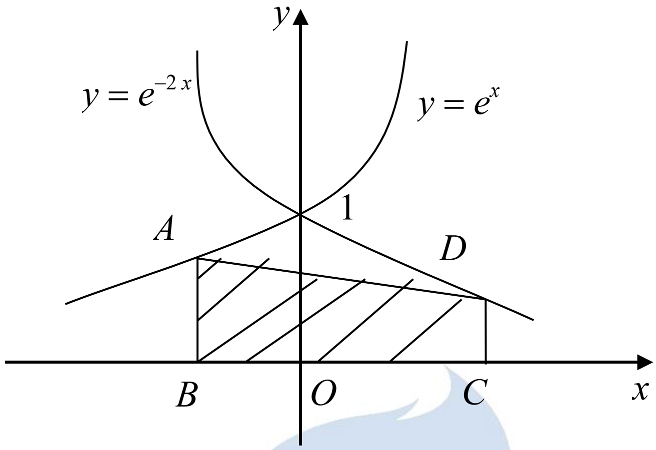
求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、（本题满分 9 分）

如图, A 和 D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB|:|DC|=2:1$, $|AB|<1$, 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



八、（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$,

计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$.

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1)【答案】$-\dfrac{\ln 3}{3^x+1}dx$

【解析】由复合函数求导法则,即 $y=\varphi(f(x))$ 的微分为$dy=\varphi'(f(x))f'(x)dx$,有

$$dy=\frac{1}{1+3^{-x}}\cdot 3^{-x}\ln 3\cdot(-1)dx=-\frac{\ln 3}{3^x+1}dx.$$

(2)【答案】$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

【解析】求函数 $y=f(x)$ 的凹凸区间,只需求出 y'',若 $y''>0$,则函数图形为上凹,若 $y''<0$,则函数图形为上凸,由题可知

$$y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2},$$

$$y''=-2e^{-x^2}+(-2x)e^{-x^2}\cdot(-2x)=4e^{-x^2}(x^2-\frac{1}{2}).$$

因为 $4e^{-x^2}>0$,所以当 $x^2-\dfrac{1}{2}<0$ 时 $y''<0$,函数图像上凸,即 $x^2<\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,函数图像上凸.故曲线上凸区间为$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

(3)【答案】1

【解析】用极限法求广义积分.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\,d(-\frac{1}{x})$$

$$\overset{\text{分部}}{=}\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^b-\int_1^b(-\frac{1}{x})\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{\ln b}{b}+\frac{\ln 1}{1}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^b\right\}=-\lim_{b\to+\infty}(\frac{\ln b}{b}+\frac{1}{b})+1=1.$$

(4)【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】这是定积分的应用.

设在$t\to t+dt$ 时刻的速度为$t\sin(t^2)$,则在 dt 时间内的路程为 $ds=t\sin(t^2)dt$,所以

从时刻$t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$秒到$t_2=\sqrt{\pi}$秒内质点所经过的路程为

$$s=\int_{t_1}^{t_2} t\sin(t^2)dt$$
$$=\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} t\sin(t^2)dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt^2$$
$$=-\frac{1}{2}\cos(t^2)\Big|_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}}=-\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}(-1-0)=\frac{1}{2}.$$

(5)【答案】-1

【解析】这是一个$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，分子分母同乘以$e^{-\frac{1}{x}}$，得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}.$$

为简化计算，令$t=-\frac{1}{x}$，则$x=-\frac{1}{t}$原式可化为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t-1}{-\frac{e^t}{t}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

二、选择题(每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】两函数在某点处相切，则在该点处的切线的斜率相等，即在该点处的导数相等，对两函数分别对x求导，得

$y'=2x+a$，则该曲线在点$(1,-1)$处的导数为$y'\big|_{x=1}=2+a$，

$2y'=y^3+3xy^2y'$，即$y'=\frac{y^3}{2-3xy^2}$，则曲线在点$(1,-1)$处的导数为

$$y'\big|_{x=1}=\frac{(-1)^3}{2-3\cdot1\cdot(-1)^2}=1,$$

两导数相等，有$2+a=1$，即$a=-1$.

又因为曲线$y=x^2+ax+b$过点$(1,-1)$，所以有$-1=1+a+b=1-1+b=b, b=-1$.

所以选项(D)正确.

(2)【答案】(B)

【解析】这是分段函数求定积分.

当$0\le x\le 1$时，$f(x)=x^2$，所以$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3$.

当$1<x\le 2$时，$f(x)=2-x$，所以

$$
\begin{aligned}
F(x)&=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x(2-t)dt\\
&=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x=\frac{1}{3}+(2x-\frac{1}{2}x^2)-(2-\frac{1}{2})\\
&=-\frac{7}{6}+2x-\frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}
$$

所以 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$，应选(B).

(3)【答案】(B)

【解析】**方法一：**用排除法.

由于不可导点也可取极值，如 $f(x)=-|x-1|$，在 $x_0=1$ 处取极大值，但是 $x_0=1$ 不是 $f(x)=-|x-1|$的驻点，所以(A)不正确；

注意到极值的局部性，即极值不是最值，所以(D)也不正确；

对于 $f(x)=-|x-1|$，在 $x_0=1$ 处取极大值，但$-x_0=-1$ 并非是$-f(x)=|x-1|$ 的极小值点，所以(C)也不成立；故选(B).

方法二：证明(B)是正确的，因为 $x_0\ne 0$，不妨设 $x_0>0$，则 $f(x_0)$ 为极大值，则在 x_0 的某个领域内有 $f(x_0)>f(x_0\pm\Delta x)$；

函数 $y=-f(-x)$ 与函数 $y=f(x)$ 关于原点对称，所以必有$-f(-x_0)<-f(-x_0\pm\Delta x)$，即在$-x_0$的某个领域内$-f(-x_0)$为极小值，故(B)是正确的.

(4)【答案】(D)

【解析】函数的定义域为 $x\ne 0$，所以函数的间断点为 $x=0$，

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=\infty\text{，所以 }x=0\text{ 为铅直渐近线,}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}==\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=1\text{，所以 }y=1\text{为水平渐近线.}$$

所以选(D).

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a,(a为常数)$，则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

(5)【答案】(A)

【解析】如图建立坐标系,则 $x\to x+dx$ 中, dx 长度的细杆的质量为 μdx，与质点的距离为 $a-x$，故两点间的引力为 $dF=\dfrac{km\mu dx}{(a-x)^2}$，积分得 $F=\int_{-l}^{0}\dfrac{km\mu}{(a-x)^2}dx$，故选(A).

同理应用微元法可知,若以 l 的中点为原点,则质点的坐标为 $(a+\frac{l}{2},0)$，故

$$F=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu}{(a+\frac{l}{2}-x)^2}dx;$$

若以 l 的左端点为原点,则质点的坐标为 $(a+l,0)$，故 $F=\int_{0}^{l}\dfrac{km\mu}{(a+l-x)^2}dx$.

故(B)、(C)、(D)均不正确,应选(A).

三、(每小题 5 分,满分 25 分.)

(1)【解析】这是个函数的参数方程,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}\right)\cdot\frac{1}{\cos t-t\sin t}$$

$$=\frac{(2\cos t-t\sin t)(\cos t-t\sin t)+(2\sin t+t\cos t)(\sin t+t\cos t)}{(\cos t-t\sin t)^2}\cdot\frac{1}{\cos t-t\sin t}$$

$$=\frac{2(\cos^2t+\sin^2t)+t^2(\sin^2t+\cos^2t)-3t\sin t\cos t+3t\sin t\cos t}{(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}.$$

【相关知识点】参数方程所确定函数的微分法:

如果 $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

(2) 【解析】用换元法求定积分.

令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2, dx=2tdt$，则

$$\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^2 \frac{1}{t^2(1+t)}\cdot 2tdt=2\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^2=2(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2})=2\ln\frac{4}{3}.$$

(3) 【解析】利用等价无穷小和洛必达法则.

当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x, e^x\sim 1+x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(4) 【解析】用分部积分法求不定积分.

$$\int x\sin^2 xdx=\int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(x-x\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int xd(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2xdx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

(5) 【解析】所给方程是一阶线性方程，其标准形式为 $y'+\frac{1}{x}y=e^x$. 通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^x e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int xe^x dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int xde^x+C\right)=\frac{1}{x}\left(xe^x-\int e^x dx+C\right)=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C).$$

代入初始条件 $y(1)=1$ 得 $C=1$，所以特解为 $y=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}e^x$.

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right),$$ 其中 C 为常数.

四、(本题满分 9 分)

【解析】首先应简化不等式，从中发现规律.

当 $x>1$ 时，原不等式即 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$，即 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$.

证法一：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，则只需证明在 $x>1$ 时 $f(x)>0$ 即可，

可利用函数的单调性证明，对于 $f(x)$ 有

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\ln x-1=\ln(\frac{x+1}{x}).$$

因 $x>1$，故 $\frac{x+1}{x}>1$，即 $f'(x)>0$，所以在 $(1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 是严格递增函数，所以

$$f(x)>f(1)=2\ln 2>0,$$

故 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$，所以当 $x>1$ 时，有不等式 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$ 成立.

证法二：当 $x>1$ 时，原不等式即 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$，不等式左右两端形式一致，故令

$f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1>0(x>1)$，所以 $f(x)=x\ln x$ 在 $x>1$ 时严格单调递增，

故 $f(x+1)>f(x)$， 即 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$.

所以当 $x>1$ 时，有不等式 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$ 成立.

五、（本题满分 9 分）

【解析】微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，

特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，故对应齐次通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$.

方程 $y''+y=x$ 必有特解为 $Y_1=ax+b$，代入方程可得 $a=1,b=0$.

方程 $y''+y=\cos x$ 的右端 $e^{\alpha x}\cos\beta x=\cos x$，$\alpha+\beta i=i$ 为特征根，必有特解

$Y_2=x\cdot A\cos x+x\cdot B\sin x$，代入方程可得 $A=0,B=\frac{1}{2}$.

由叠加原理，原方程必有特解 $Y=Y_1+Y_2=x+\frac{x}{2}\sin x$.

所以原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$.

【相关知识点】关于微分方程特解的求法：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

具有形如 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中 $Q_m(x)$ 与 $P_m(x)$ 同次（m 次）的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

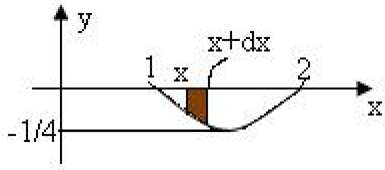
$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为0 或1.

六、（**本题满分 9 分**）

【解析】利用定积分求旋转体的体积，用微元法，曲线为一抛物线，与 x 轴的交点是 $x_1=1$，$x_2=2$，顶点坐标为$(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$.

方法一：考虑对 x 积分，如图中阴影部分绕 y 轴旋转一周，环柱体的体积为



$$dV=\pi(x+dx)^2|y|-\pi x^2|y|=2\pi x|y|dx+\pi|y|dx^2$$

其中dx^2为 $dx\to 0$ 的高阶无穷小，故可省略，且 y 为负的，

故$|y|=-y$，即$dV=-2\pi xydx=-2\pi x(x-1)(x-2)dx$.

把 x 从$1\to 2$ 积分得

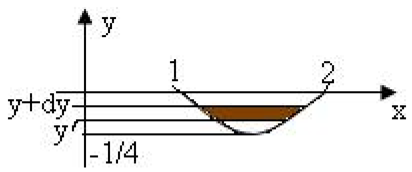
$$V=\int_1^2 2\pi x(1-x)(x-2)dx=2\pi\int_1^2(3x^2-x^3-2x)dx$$

$$=2\pi\left[x^3-\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_1^2=2\pi(0+\frac{1}{4})=\frac{\pi}{2}.$$

方法二：考虑对 y 的积分，如图中阴影部分绕 y 轴旋转一周的体积为抛物线两半曲线分别绕 y 轴旋转一周后的体积差，即

$$dV=\pi x_2^2dy-\pi x_1^2dy$$

其中，x_1,x_2 为$Y=y$与抛物线的交点，且 $x_2>x_1$，



把$Y=y$代入抛物线方程 $y=(x-1)(x-2)$，解得

$$x_1=\frac{3-\sqrt{1+4y}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{1+4y}}{2},$$

故旋转体体积为$V=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\pi(x_2^2-x_1^2)dy$. 把 x_1,x_2 的值代入化简，得

$$V=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}3\pi\sqrt{1+4y}dy=\frac{3\pi}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}(1+4y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{4}}^{0}=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}.$$

七、(本题满分 9 分)

【解析】可以利用函数的极值求解.

设 B、C 的横坐标分别为 x_1, x，因为 $|AB|<1$，所以 $x_1<0, x>0$. 依题设

$|AB|:|DC|=2:1$，所以有 $e^{x_1}=2e^{-2x}$，两边同时取自然对数，得 $x_1=\ln 2-2x$，

而 $BC=x-x_1=x-(\ln 2-2x)=3x-\ln 2, (x>0)$，

所以梯形 $ABCD$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}(e^{x_1}+e^{-2x})(3x-\ln 2)=\frac{1}{2}(2e^{-2x}+e^{-2x})(3x-\ln 2)=\frac{3}{2}(3x-\ln 2)e^{-2x}.$$

求函数 $S=\frac{3}{2}(3x-\ln 2)e^{-2x}$，($x>0$)的最值，满足一般函数求最值的规律，两边对 x 求导，并令 $S'=0$ 有

$$S'=\frac{3}{2}(3-6x+2\ln 2)e^{-2x}=0,$$

得驻点 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$，在此点 S' 由正变负，所以 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$ 是极大值点.

又驻点唯一，故 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2>0$ 是 $S=\frac{3}{2}(3x-\ln 2)e^{-2x}$ 最大值点.

此时 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$，$x_1=\frac{1}{3}\ln 2-1$ 时，梯形 $ABCD$ 面积最大，

故 B 点的坐标为 $(\frac{1}{3}\ln 2-1, 0)$，C 点的坐标为 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2, 0)$.

八、(本题满分 9 分)

【解析】这是个抽象函数求定积分，由题知

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin(x+\pi)=x-\sin x, x\in[0,\pi),$$

$$f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+2\pi)=x-\sin x+\sin x=x, x\in[0,\pi),$$

而 $$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx,$$

对于 $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$，令 $t=x-\pi$，则 $x=t+\pi, dx=dt$，所以

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(t+\pi)dt=\int_0^{\pi}(t-\sin t)dt;$$

对于 $\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx$，令 $t=x-2\pi$，则 $x=t+2\pi, dx=dt$，所以

$$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(t+2\pi)dt=\int_0^{\pi} tdt;$$

所以 $$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx$$

$$=\int_0^\pi (t-\sin t)dt+\int_0^\pi tdt$$

$$=\int_0^\pi 2tdt-\int_0^\pi \sin tdt$$

$$=\left[t^2\right]_0^\pi+\left[\cos t\right]_0^\pi=\pi^2-2\,.$$