1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 上对应于点 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是____________.

(2) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$____________.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=$____________.

(4) 下列两个积分的大小关系是：$\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx$ ____________ $\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$，则函数 $f[f(x)]=$____________.

二、选择题(每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x_2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（ ）

(A) $a=1,b=1$ (B) $a=-1,b=1$ (C) $a=1,b=-1$ (D) $a=-1,b=-1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于（ ）

(A) $f(x)$ (B) $f(x)dx$ (C) $f(x)+C$ (D) $f'(x)dx$

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 （ ）

(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$，则 $F'(x)$ 等于（ ）

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ (B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$ (C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$ (D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f'(0)\neq 0, f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（ ）

(A) 连 续 点 (B) 第 一 类 间 断 点
(C) 第二类间断点 (D) 连续点或间断点不能由此确定

三、(每小题 5 分,满分 25 分.)

⑴ 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=9$,求常数 a .

⑵ 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy .

⑶ 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

(4) 计 算 $\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

(5) 求微分方程 $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P ,使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a>0, b>0$).

五、(本题满分 9 分)

证明：当 $x>0$,有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

六、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}dt$,其中 $x>0$,求 $f(x)+f(\dfrac{1}{x})$.

七、(本题满分 9 分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此平面图形绕 x 轴旋转一周所围成旋转体的体积.

八、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 之通解,其中 a 为实数.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】 $y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}(x-\frac{3}{8}\sqrt{3})$

【解析】将 $t=\frac{\pi}{6}$ 代入参数方程得 x,y 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的函数值: $x\big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$， $y\big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}$;

得切点为 $(\frac{3}{8}\sqrt{3},\frac{1}{8})$.

过已知点 (x_0,y_0) 的法线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$, 当函数在点 (x_0,y_0) 处的导数

$y'\big|_{x=x_0}\neq 0$ 时, $k=\frac{1}{y'(x_0)}$. 所以需求曲线在点 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的导数.

由复合函数求导法则,可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t,$$

$$y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

法线斜率为$k=\sqrt{3}$.所以过已知点的法线方程为$y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}(x-\frac{3}{8}\sqrt{3})$.

【相关知识点】复合函数求导法则：

如果$u=g(x)$在点 x 可导，而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或} \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(2)【答案】$\left(e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)$

【解析】原函数对 x 求导，有

$$y'=\left(e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'=\left(e^{\tan\frac{1}{x}}\right)'\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\right)'\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\left(e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\right).$$

【相关知识点】1. 两函数乘积的求导公式：

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

2. 复合函数的求导法则：

如果$u=g(x)$在点 x 可导，而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或} \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(3)【答案】$\frac{4}{15}$

【解析】 对于原定积分，有换元法或拆项法可选择，不管是何种方法，最终的目的都是去掉积分式子中的根式或使得根式积分可以单独积分出结果.

方法 1：换元法，令$\sqrt{1-x}=t$，原积分区间为$0\le x\le 1$，则$0\le 1-x\le 1$，进而$0\le\sqrt{1-x}\le 1$，新积分区间为$0\le t\le 1$；当 $x=0$ 时，$t=1$，当 $x=1$ 时，$t=0$，故新积分上限为 0，下限为 1.

$$d\sqrt{1-x}=dt\Rightarrow dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx=\frac{-1}{2t}dx\text{，则}dx=-2tdt.$$

$$\text{原式} = \int_1^0 (1-t^2)\cdot t\cdot(-2tdt)$$
$$= 2\int_0^1 \left(t^2 - t^4\right)dt = 2\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}.$$

方法 2：拆项法，$x = (x-1)+1$，

$$\text{原式} = \int_0^1 \left[(x-1)+1\right]\sqrt{1-x}dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1-x}dx - \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

(4)【答案】>

【解析】由于e^{-x^3}，e^{x^3} 在$[-2,-1]$连续且$e^{-x^3} > e^{x^3}$，根据比较定理得到

$$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3}dx > \int_{-2}^{-1} e^{x^3}dx.$$

【相关知识点】对于相同区间上的定积分的比较，有“比较定理”如下：

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间$[a,b]$（a,b 为常数，$a<b$）上连续且可积，且 $f(x)\ge g(x)$，则有$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$

(5)【答案】1

【解析】对于分段函数的复合函数求解必须取遍内层函数的值域，不能遗漏，求出复合后函数的所有可能的解析式.

根据 $f(x)$ 的定义知，当$|x|\le 1$时，有 $f(x)=1$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(1)=1$.于是当$|x|\le 1$时，复合函数 $f[f(x)]\equiv 1$；

当$|x|>1$时，有 $f(x)=0$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(0)=1$，即当$|x|>1$时，也有 $f[f(x)]\equiv 1$.

因此，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f[f(x)]\equiv 1$.

二、选择题(每小题 3 分，满分 15 分.)

(1)【答案】C

【解析】本题考查多项式之比当 $x\to\infty$ 时的极限.

由题设条件，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}\right)=0,$$

分析应有$\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 否则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}\right)\neq 0$.

所以解以上方程组,可得$a=1$, $b=-1$. 所以此题应选 C.

(2)【答案】B

【解析】由函数的不定积分公式:

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $\int f(x)dx=F(x)+C$, $dF(x)=f(x)dx$, 有

$$d[\int f(x)dx]=[\int f(x)dx]'dx=f(x)dx.$$

所以本题应该选(B).

(3)【答案】A

【解析】本题考查高阶导数的求法.

为方便记 $y=f(x)$. 由 $y'=y^2$, 逐次求导得

$$y''=2yy'=2y^3,\ y'''=3!\,y^2y'=3!\,y^4,\ \cdots,$$

由第一归纳法,可归纳证明 $y^{(n)}=n!\,y^{n+1}$.

假设$n=k$ 成立,即 $y^{(k)}=k!\,y^{k+1}$, 则

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}&=\left[y^{(k)}\right]'=\left[k!\,y^{k+1}\right]'=(k+1)!\,y^k\cdot y'\\&=(k+1)!\,y^{(k+1)+1},\end{aligned}$$

所以$n=k+1$ 亦成立,原假设成立.

(4)【答案】A

【解析】对 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$ 两边求导数得

$$F'(x)=f(e^{-x})(e^{-x})'-f(x)(x)'=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$$

故本题选 A.

【相关知识点】1. 对积分上限的函数的求导公式:

若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x)dx$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 均一阶可导, 则

$$F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$$

2. 复合函数求导法则:

如果$u=g(x)$ 在点 x 可导, 而 $y=f(x)$ 在点$u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$

在点 x 可导，且其导数为$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$ 或$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

(5)【答案】B

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$，

由函数在一点处导数的定义，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

得$\lim\limits_{x\to0}F(x)=f'(0)\neq0=f(0)=F(0)$，

所以函数不连续，且极限存在但不等于函数值，故为第一类(可去)间断点，故本题选 B.

【相关知识点】1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 函数 $f(x)$ 的间断点或者不连续点的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，只要满足一下三种情况之一即是间断点.

① 在 $x=x_0$ 没有定义；

② 虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③ 虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

三、(每小题 5 分，满分 25 分.)

(1)【解析】此题考查重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^x}{(1-\frac{a}{x})^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}\cdot a}}{(1-\frac{a}{x})^{\frac{x}{-a}\cdot(-a)}}=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}=9,$$

得$2a=\ln 9\Rightarrow a=\ln 3$.

或 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{x}{x-a}\cdot2a}=e^{2a}$，

同理可得$a=\ln 3$.

(2)【解析】方程两边求微分，得

$$2dy - dx = \ln(x-y)\cdot d\,(x-y) + (x-y)\cdot d\ln(x-y)$$

$$= (dx-dy)\ln(x-y) + (x-y)\frac{dx-dy}{x-y},$$

整理得 $dy = \dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$.

(3) 【解析】对分式求导数, 有公式 $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, 所以

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, y'' 在此变号, 即是 $x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时, $y''<0$; $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$时, $y''>0$;

故拐点为 $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4})$.

【相关知识点】1. 拐点的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域连续, 函数 $f(x)$ 的图形在点 x_0 处的左右侧凹凸性相反, 则称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $f(x)$ 的拐点.

2. 拐点判别定理：

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 连续, 在去心邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, 就是区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内不包括点 x_0 二阶可导, 且 $f''(x)(x-x_0)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 上不变号, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 二阶可导, $f''(x_0)=0$, 又 $f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

本题利用第一个判别定理就足够判定所求点是否是拐点了.

(4) 【解析】由 $\dfrac{dx}{(1-x)^2} = \dfrac{-d\,(1-x)}{(1-x)^2} = d\dfrac{1}{(1-x)}$ 有

$$\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx = \int\ln x\,d(\frac{1}{1-x}) \overset{\text{分部法}}{=} \frac{\ln x}{1-x} - \int(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x})dx$$

$$= \frac{x\ln x}{1-x} + \ln|1-x| + C,\quad C \text{ 为任意常数.}$$

注：分部积分法的关键是要选好谁先进入积分号的问题, 如果选择不当可能引起更繁杂的计

算, 最后甚至算不出结果来. 在做题的时候应该好好总结, 积累经验.

【相关知识点】分部积分公式：假定$u=u(x)$ 与$v=v(x)$ 均具有连续的导函数, 则

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \text{或者} \int udv = uv - \int vdu.$$

(5)【解析】所给方程为一阶线性非齐次方程, 其标准形式为

$$y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}.$$

由于 $e^{\int\frac{dx}{x\ln x}} = |\ln x|$, 两边乘以$\ln x$ 得$(y\ln x)' = \frac{\ln x}{x}$.

积 分 得 $y\ln x = \int \frac{\ln x}{x}dx + C$,

通解为 $y = \frac{\ln x}{2} + \frac{C}{\ln x}$.

代入初始条件 $y|_{x=e} = 1$ 可得 $C = \frac{1}{2}$, 所求特解为 $y = \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{2\ln x}$.

四、(本题满分 9 分)

【解析】对椭圆方程进行微分, 有 $\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

过曲线上已知点(x_0, y_0) 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 当 $y'(x_0)$ 存在时, $k = y'(x_0)$.

所以点(x, y) 处的切线方程为$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x)$, 化简得到 $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1$.

分别令 $X=0$ 与$Y=0$, 得切线在 x, y 上的截距分别为$\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$;

又由椭圆的面积计算公式πab, 其中a, b 为半长轴和半短轴, 故所求面积为

$$S = \frac{1}{2}\frac{a^2}{x}\cdot\frac{b^2}{y} - \frac{1}{4}\pi ab, x\in(0, a).$$

a, b 为常数, 欲使得 S 的最小, 则应使得 xy 最大; 从而问题化为求$u = xy$ (y 由椭圆方程所确定)当 $x\in(0, a)$ 时的最大值点.

令$u = xy, u' = xy' + y = 0$, 得 $y' = -\frac{y}{x}$, 再对 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 两边求导得 $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}y' = 0$, 联

合可得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$（唯一驻点），即在此点 $u=xy$ 取得最大，S 取得最小值.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}S(x)=\lim\limits_{x\to a-0}S(x)=+\infty$，所以 $S(x)$ 在 $(0,a)$ 上存在最小值，$x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 必为最小点，所求 P 点为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

五、（本题满分 9 分）

【解析】证明不等式的一般方法是将表达式移到不等号的一边，令其为 $f(x)$，另一边剩下 0，再在给定区间内讨论 $f(x)$ 的单调性即可证明原不等式.

令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}<0\ (x>0)$. 因此，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减；又有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

故 $0<x<+\infty$ 时，$f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以原不等式得证.

六、（本题满分 9 分）

【解析】**方法 1**：$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt$，由换元积分 $t=\dfrac{1}{u}$，$dt=\dfrac{-1}{u^2}du$，$t:1\to\dfrac{1}{x}\Rightarrow u:1\to x$；

所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt\overset{t=\frac{1}{u}}{=}\int_1^{x}\frac{\ln u}{u(u+1)}du$.

由区间相同的积分式的可加性，有

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln t}{t(t+1)}dt=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

方法 2：令 $F(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则

$$F'(x)=\frac{\ln x}{1+x}+\frac{\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x}.$$

由牛顿-莱布尼兹公式，有

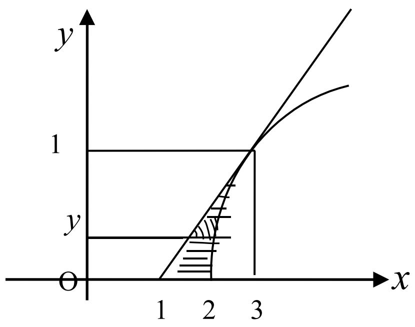
$$F(x)-F(1)=\int_1^x\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 x,$$

而$F(1)=\int_1^1 \frac{\ln x}{x}dx=0$，故$F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

【相关知识点】牛顿-莱布尼兹公式：设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的任意一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

七、（本题满分 9 分）



【解析】先求得切线方程：对抛物线方程求导数，得$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$，过曲线上已知点(x_0,y_0)的切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$，当$y'(x_0)$存在时，$k=y'(x_0)$.

所以点$(x_0,\sqrt{x_0-2})$处的切线方程为

$$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0),$$

此切线过点$P(1,0)$，所以把点$P(1,0)$代入切线方程得$x_0=3$，再$x_0=3$代入抛物线方程得$y_0=1$，$y'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3-2}}=\frac{1}{2}$. 由此，与抛物线相切于$(3,1)$斜率为$\frac{1}{2}$的切线方程为

$x-2y=1$.

旋转体是由曲线$y=f(x)$，直线$x-2y=1$与x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所形成的，求旋转体体积V：

方法 1：曲线表成y是x的函数，V是两个旋转体的体积之差，套用已有公式得

$$V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2dx-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2dx$$

$$=\pi\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_1^3-\pi(\frac{1}{2}x^2-2x)\Big|_2^3=\frac{\pi}{6}.$$

方法 2：曲线表成x是y的函数，并作水平分割，相应于$\left[y,y+dy\right]$小横条的体积微元，如上图所示，

$$dV=2\pi y\left[(y^2+2)-(2y+1)\right]dy,$$

于是，旋转体体积 $V=2\pi\int_0^1(y^3-2y^2+y)dy=2\pi\left(\frac{1}{4}y^4-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$

【相关知识点】1. 由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积为：$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，非负，$a>0$，则曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积为：$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$（可用微元法导出）.

八、（本题满分 9 分）

【解析】所给方程为常系数二阶线性非齐次方程，特征方程 $r^2+4r+4=0$ 的根为 $r_1=r_2=-2$，原方程右端 $e^{ax}=e^{\alpha x}$ 中的 $\alpha=a$.

当 $\alpha=a\neq-2$ 时，可设非齐次方程的特解 $Y=Ae^{ax}$，代入方程可得 $A=\frac{1}{(a+2)^2}$，

当 $\alpha=a=-2$ 时，可设非齐次方程的特解 $Y=x^2Ae^{ax}$，代入方程可得 $A=\frac{1}{2}$，

所以通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{e^{ax}}{(a+2)^2}\quad(a\neq-2)$，

$$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{x^2e^{-2x}}{2}\quad(a=-2).$$

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$，可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数，方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$，在复数域内解出两个特征根 r_1,r_2；

分三种情况：

① 两个不相等的实数根 r_1,r_2，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

② 两个相等的实数根 $r_1=r_2$，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$；

③ 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中$C_1$，$C_2$为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$，则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解，其中$Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式，而 k 按λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.