1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(每小题 3 分,满分 21 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ ____________.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t dt =$ ____________.

(3) 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是____________.

(4) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)$, 则 $f'(0)=$ ____________.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x)=$ ____________.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是__________.

(7) 设 $\tan y = x+y$, 则 $dy=$ ____________.

二、计算题(每小题 4 分,满分 20 分.)

(1) 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 y'.

(2) 求 $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

三、选择题(每小题 3 分,满分 18 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $x>0$ 时, 曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ ( )

(A) 有且仅有水平渐近线(B)
有且仅有铅直渐近线
(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线
(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 若$3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ ( )

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

(3) 曲线 $y=\cos x(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 与 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为　　( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) $\dfrac{\pi^2}{2}$　　(D) π^2

(4) 设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处　　( )

(A) 必取极大值　　(B) 必取极小值

(C) 不可能取极值　　(D) 是否取极值不能确定

(5) 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)　　( ) (A) ae^x+b (B) axe^x+b (C) ae^x+bx (D) axe^x+bx

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是( )

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的解.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本大题满分 11 分)

对函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$，填写下表：

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹($\bigcup$)区间	
凸($\bigcap$)区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当$0\le x\le 1$时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为$\dfrac{1}{3}$，试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积V 最小.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题(每小题 3 分,满分 21 分.)

(1)【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】这是个$0\cdot\infty$ 型未定式,可将其等价变换成$\dfrac{0}{0}$型,从而利用洛必达法则进行求解.

方法一：$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x = \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} \overset{\text{洛}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

方法二：$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x = \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}.$$

【相关知识点】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$是两个重要极限中的一个，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2)【答案】π

【解析】利用分部积分法和牛顿-莱布尼茨公式来求解,

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt = \int_0^{\pi} td(-\cos t) \overset{\text{分部法}}{=} \left[-t\cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)dt$$

$$= \pi + 0 + \left[\sin t\right]_0^{\pi} = \pi + (0-0) = \pi.$$

(3)【答案】 $y=2x$

【解析】要求平面曲线的切线,首先应求出该切线的斜率,即 $f'(x_0)$.

这是一个积分上限函数,满足积分上限函数的求导法则,即 $y'=(x-1)(x-2)$.

由 y'在其定义域内的连续性,可知 $y'\big|_{x=0} = (0-1)(0-2)=2$.

所以,所求切线方程为 $y-0=2(x-0)$,即 $y=2x$.

(4)【答案】$n!$

【解析】**方法一**：利用函数导数的概念求解,即

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n) = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!.$$

方法二：利用其导数的连续性,由复合函数求导法则可知,

$$f'(x) = (x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n) + x\cdot 1\cdot(x+2)\cdots\cdots(x+n)+\cdots+$$

$$x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n-1)\cdot 1,$$

所以 $f'(0)=(0+1)(0+2)\cdots\cdots(0+n)+0+\cdots+0=1\cdot 2\cdots\cdots n=n!$.

(5)【答案】 $x-1$

【解析】由定积分的性质可知，$\int_0^1 f(t)dt$ 和变量没有关系，且 $f(x)$ 是连续函数，故 $\int_0^1 f(t)dt$ 为一常数，为简化计算和防止混淆，

令 $\int_0^1 f(t)dt=a$，则有恒等式 $f(x)=x+2a$，两边 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x+2a)dx,$$

即 $$a=\int_0^1(x+2a)dx=\int_0^1 xdx+2a\int_0^1 dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+2a[x]_0^1=\frac{1}{2}+2a,$$

解之得 $a=-\frac{1}{2}$，因此 $f(x)=x+2a=x-1$.

(6)【答案】 $a=b$

【解析】如果函数在 x_0 处连续，则函数在该点处的左右极限与该点处函数值必然相等，

由函数连续性可知 $f_-(0)=f(0)=a+b\cdot 0=a$.

而 $$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{bx}\cdot b=b\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{bx}=b,$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必有 $f_-(0)=f_+(0)$，即 $a=b$.

(7)【答案】 $\frac{dx}{(x+y)^2}$

【解析】这是个隐函数，按照隐函数求导法，两边微分得 $\sec^2 y\cdot dy=dx+dy$，

所 以 $dy=\frac{dx}{\sec^2 y+1}=\frac{dx}{\tan^2 y}=\frac{dx}{(x+y)^2}$，$(x+y\neq 0)$.

二、计算题(每小题 4 分，满分 20 分.)

(1)【解析】令 $u=e^{-\sqrt{x}}$，$v=-\sqrt{x}$，则 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}=\arcsin u$，由复合函数求导法则，

$$y'=(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot e^v\cdot v'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot e^v\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

即 $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}\cdot e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

【相关知识点】复合函数求导法则： $y=\varphi(f(x))$ 的导数 $y'=\varphi'(f(x))f'(x)$.

(2) 【解析】利用不定积分的换元积分法, $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}=\int \frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}+C$.

(3) 【解析】可将函数转化称为熟悉的形式来求其极限,

$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}},$$

令 $2\sin x+\cos x-1=t$, 则当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$,

则 $\lim_{x\to 0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}}=\lim_{t\to 0}[1+t]^{\frac{1}{t}}$,

这是个比较熟悉的极限, 即 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

所以 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$,

而 $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}=2$,

所以 $\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^2$.

(4) 【解析】这是个函数的参数方程,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2}{(2t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

【相关知识点】参数方程所确定函数的微分法：如果 $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

(6) 【解析】利用定积分的分部积分法求解定积分,

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df'(2x)=\frac{1}{2}\left[x^2\cdot f'(2x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[1\cdot f'(2)-0\right]-\int_0^1 xf'(2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}\int_0^1 xdf(2x)$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\left[\frac{1}{2}(xf(2x))\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx,$$

令 $t=2x$,则 $x=\frac{1}{2}t, dx=\frac{1}{2}dt$,

所以 $\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$.

把 $f(2)=\frac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f''(2x)dx&=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx\\&=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt\\&=\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=0.\end{aligned}$$

三、选择题(每小题 3 分,满分 18 分.)

(1)【答案】(A)

【解析】函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 只有间断点 $x=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}$, 其中 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数. 当 $x\to0^+$ 时, x 为无穷小, 无穷小量和一个有界函数的乘积仍然是无穷小, 所以

$$\lim_{x\to0^+} y=\lim_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

故函数没有铅直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1,$$

所以 $y=1$ 为函数的水平渐近线, 所以答案为(A).

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y=f(x)$ 在其间断点 $x=x_0$ 处有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则 $x=x_0$ 是函数的一条铅直渐近线;

水平渐近线：当 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a,(a$为常数）, 则 $y=a$ 为函数的水平渐近线.

(2)【答案】(B)

【解析】判定方程 $f(x)=0$ 实根的个数, 其实就是判定函数 $y=f(x)$ 与 x 有几个交点, 即对函数图形的描绘的简单应用,

令 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$,

则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$.

令 $t=x^2$，则 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b=5t^2+6at+3b=f'(t)$，

其判别式$\Delta=(6a)^2-4\cdot5\cdot3b=12(3a^2-5b)<0$，

所以 $f'(t)=5t^2+6at+3b$ 无实根，即 $f'(t)>0$.

所以 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 是严格的单调递增函数.

又
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^5+2ax^3+3bx+4c)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^5+2ax^3+3bx+4c)=+\infty$$

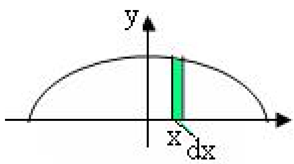
所以利用连续函数的介值定理可知，在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使得

$f(x_0)=0$，又因为 $y=f(x)$ 是严格的单调函数，故 x_0 是唯一的.

故 $f(x)=0$ 有唯一实根，应选(B).

(3)【答案】(C)

【解析】如图 $y=\cos x(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的图像，则当 $y=\cos x$ 绕 x 轴旋转一周，在 x 处取微增dx，则微柱体的体积$dV=\pi\cos^2 xdx$，所以体积V有



$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 xdx$$
$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}dx=\frac{\pi}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xd\,2x+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[-\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0+\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{2}.$$

因此选(C).

(4)【答案】(D)

【解析】题中给出的条件中，除了一处极值点外均未指明函数其它性质，为了判定的方便，可以举出反例而排除.

若取 $f(x)=g(x)=-(x-a)^2$，两者都在 $x=a$ 处取得极大值 0，而

$F(x)=f(x)g(x)=(x-a)^4$ 在 $x=a$ 处取得极小值，所以(A)、(C)都不正确.

若取 $f(x)=g(x)=1-(x-a)^2$，两者都在 $x=a$ 处取得极大值 1，而

$F(x)=f(x)g(x)=\left[1-(x-a)^2\right]^2$ 在 $x=a$ 处取得极大值 1，所以(B)也不正确，从而选(D).

(5)【答案】(B)

【解析】微分方程 $y''-y=e^x+1$ 所对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2-1=0$，它的两个根是 $r_1=1, r_2=-1$．

而形如 $y''-y=e^x$ 必有特解 $Y_1=x\cdot ae^x$； $y''-y=1$ 必有特解 $Y_1=b$．

由叠加得原方程必有特解 $Y=x\cdot ae^x+b$，应选(B)．

(6)【答案】(D)

【解析】利用导数的概念判定 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件.

(A) 等价于 $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 存在，所以只能保证函数在 $x=a$ 右导数存在；

(B)、(C)显然是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的必要条件，而非充分条件，

如 $y=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，因而不可导，但是

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos(0+\frac{1}{h})-\cos(0-\frac{1}{h})}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}}{2h}=0,$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos(\frac{1}{2h})-\cos(0-\frac{1}{2h})}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\frac{1}{2h}-\cos\frac{1}{2h}}{h}=0$$ 均存在；

(D) 是充分的：

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\overset{\Delta x=-h}{=}\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\text{存在}\Rightarrow f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\text{存在},$$

应选(D).

四、(本题满分 6 分)

【解析】所给方程为一阶线性非齐次微分方程，先写成标准形式

$$y'+(\frac{1}{x}-1)y=\frac{1}{x}e^{2x},$$

通解为 $y=e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx}(\int\frac{1}{x}e^{2x}e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx+C)=\frac{1}{x}e^x(\int\frac{1}{x}e^{2x}\frac{x}{e^x}dx+C)=\frac{e^x}{x}(e^x+C)$．

代入初始条件 $y(1)=0$，得 $C=-e$，所求解为 $y=\frac{e^x}{x}(e^x-e)$．

【相关知识点】一阶线性非齐次微分方程的标准形式为 $y'+p(x)y=q(x)$，其通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\text{，其中}C\text{ 为常数.}$$

五、（本题满分 7 分）

【解析】先将原式进行等价变换，再求导，试着发现其中的规律，

$$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt\,,$$

所给方程是含有未知函数及其积分的方程，两边求导，得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt\,,$$

再求导，得

$$f''(x)=-\sin x-f(x)\,,\quad \text{即 } f''(x)+f(x)=-\sin x\,,$$

这是个简单的二阶常系数非齐次线性微分方程，对应的齐次方程的特征方程为$r^2+1=0$，

此特征方程的根为$r=\pm i$，而右边的$\sin x$ 可看作$e^{\alpha x}\sin\beta x$， $\alpha=0,\beta=1,\alpha\pm i\beta=\pm i$ 为特征根，因此非齐次方程有特解$Y=xa\sin x+xb\cos x$.

代入方程并比较系数，得$a=0,b=\frac{1}{2}$，故$Y=\frac{x}{2}\cos x$，所以

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x\,.$$

又因为$f(0)=0,f'(0)=1$，所以$c_1=0,c_2=\frac{1}{2}$， 即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、（本题满分 7 分）

【解析】**方法一：**判定方程 $f(x)=0$ 等价于判定函数 $y=f(x)$ 与 x 的交点个数.

令 $$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx\,,$$

其中$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$是定积分，为常数，且被积函数$1-\cos 2x$ 在$(0,\pi)$ 非负，故$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx>0$，为简化计算，令$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=k>0$，即$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$，

则其导数 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$，令 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x=e$，

即 $\begin{cases} f'(x)>0, & 0<x<e \\ f'(x)<0, & e<x<+\infty \end{cases}$，

所以，$x=e$是最大点，最大值为$f(e)=\ln e-\frac{e}{e}+k=k>0$.

又因为 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x - \dfrac{x}{e} + k) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - \dfrac{x}{e} + k) = -\infty \end{cases}$，

由连续函数的介值定理知在$(0, e)$ 与$(e, +\infty)$ 各有且仅有一个零点(不相同)，

故方程$\ln x = \dfrac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在$(0, +\infty)$ 有且仅有两个不同实根.

方法二： $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x}dx$，因为当$0 \le x \le \pi$时，$\sin x \ge 0$，所以

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x}dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin xdx = \sqrt{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{2} > 0 .$$

其它同方法一.

七、(本大题满分 11 分)

【解析】函数 $y = \dfrac{x+1}{x^2}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，将函数化简为$y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$，

则 $y' = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(-\dfrac{2}{x} - 1), y'' = \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{1}{x^3}(\dfrac{6}{x} + 2)$.

令 $y' = 0$，得 $x = -2$，即

$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2}(-\dfrac{2}{x} - 1) > 0, x \in (-2, 0), \\ y' = \dfrac{1}{x^2}(-\dfrac{2}{x} - 1) < 0, x \in (-\infty, -2)\cup(0, +\infty), \end{cases}$ 故 $x = -2$ 为极小值点.

令 $y'' = 0$，得 $x = -3$，即

$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{x^3}(\dfrac{6}{x} + 2) > 0, x \in (-3, 0)\cup(0, +\infty), \text{为凹} \\ y'' = \dfrac{1}{x^3}(\dfrac{6}{x} + 2) < 0, x \in (-\infty, -3), \text{为凸}, \end{cases}$

y'' 在 $x = -3$ 处左右变号，所以 $x = -3, y(-3) = \dfrac{2}{9}$ 为函数的拐点.

又 $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}) = \infty$，故 $x = 0$ 是函数的铅直渐近线；

$\lim\limits_{x\to \infty} y = \lim\limits_{x\to \infty}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}) = 0$，故 $y = 0$ 是函数的水平渐近线.

填写表格如下：

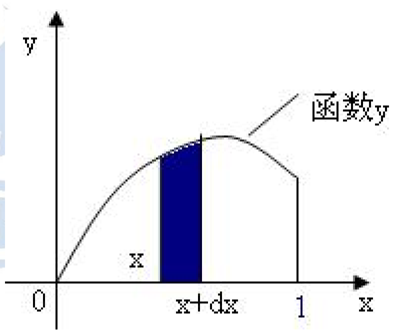
单调减少区间	$(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$

单调增加区间	$(-2,0)$
极值点	$x=-2$
极值	$y=-\frac{1}{4}$
凹区间	$(-3,0)\cup(0,+\infty)$
凸区间	$(-\infty,-3)$
拐点	$(-3,-\frac{2}{9})$
渐近线	$x=0,y=0$

八、（本题满分 10 分）

【解析】由题知曲线过点$(0,0)$，得$c=0$，即 $y=ax^2+bx$．

如图所示，从 $x\to x+dx$ 的面积$dS=ydx$，所以



$$S=\int_0^1 ydx=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

由题知 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，即 $b=\frac{2-2a}{3}$．

当 $y=ax^2+bx$ 绕 x 轴旋转一周，则从 $x\to x+dx$ 的体积 $dV=\pi y^2dx$，所以旋转体积

$$V=\int_0^1\pi y^2dx=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi\left[\frac{a^2x^5}{5}+\frac{abx^4}{2}+\frac{b^2x^3}{3}\right]_0^1=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right),$$

b 用 a 代入消去 b，得 $V=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{4(1-a)^2}{27}+\frac{a(1-a)}{3}\right]$，这是个含有 a 的函数，两边对 a 求导得

$$\frac{dV}{da}=\frac{\pi}{27}\left(\frac{4}{5}a+1\right),$$

令其等于 0 得唯一驻点 $a=-\frac{5}{4}$，$\frac{dV}{da}$ 在该处由负变正，此点为极小值点，故体积最小，这时$b=\frac{3}{2}$，故所求函数 $y=ax^2+bx+c=-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x$．