1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学 I

一、(每小题 5，本题满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

(1) 若 $f(t)=\lim_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$ ________

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leq 0\\ x^3, & 0<x\leq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，则 $f(7)=$ ________.

(4) 设 4 阶矩阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，$B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则行列式 $|A+B|=$ ________.

三、选择题(每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是( )

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小
(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值
(C) 某个邻域内单调增加　　(D) 某个邻域内单调减少

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leq R^2, z\geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$，则( )

(A) $\iiint_{\Omega_1}xdv=4\iiint_{\Omega_2}xdv$　　(B) $\iiint_{\Omega_1}ydv=4\iiint_{\Omega_2}ydv$

(C) $\iiint_{\Omega_1}zdv=4\iiint_{\Omega_2}zdv$　　(D) $\iiint_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint_{\Omega_2}xyzdv$

（4） 若 $a_n \quad x \quad 1 \,_n$ 在 $x \quad 1$ 处收敛，则此级数在 $x \quad 2$ 处（ ）

$n \quad 1$

（A）条件收敛　　　　　　（B） 绝对收敛

（C）发散　　　　　　　　（D）收敛性不能确定

（5） n 维向量组 $_1, \,_2, \quad , \,_s \; 3 \quad s \quad n$ 线性无关的充分必要条件是（ ）

（A）有一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \quad , k_s$，使 $k_1 \,_1 \quad k_2 \,_2 \qquad k_s \,_s \quad 0$

（B） $_1, \,_2, \quad , \,_s$ 中任意两个向量都线性无关

（C） $_1, \,_2, \quad , \,_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出

（D） $_1, \,_2, \quad , \,_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

四、（本题满分 6 分）

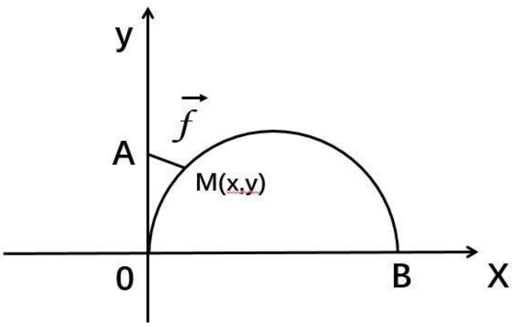
设 $u \quad yf \;\frac{x}{y} \quad xg \;\frac{y}{x}$，其中 f , g 具有二阶连续导数，求 $x \frac{^2u}{x^2} \quad y \frac{^2u}{x \; y}$.

五、（本题满分 8 分）

设函数 $y \quad y \; x$ 满足微分方程 $y \quad 3y \quad 2y \quad 2e^x$，且图形在点 $0,1$ 处的切线与曲线 $y \quad x^2 \quad x \quad 1$ 在该点的切线重合，求函数 $y \quad y \; x$.

六、（本题满分 9 分）

设位于点 $0,1$ 的质点A对质点M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（$k \quad 0$ 为常数，r 为质点A与M 之间的距离)，质点M 沿曲线 $y \quad \sqrt{2x \quad x^2}$ 自 B $2,0$ 运动到O $0,0$.求在此运动过程中质点A对质点M 的引力所做的功.



七、（本题满分 6 分）

已知 $AP \quad PB$，其中 $B \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$，$P \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}$，求 A 及 A^5.

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{matrix}$ 与 $B \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ 相似，

（1）求 x 与 y，（2）求一个满足 $P^{\ 1}AP \quad B$ 的可逆矩阵 P.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f \quad x$ 在区间 a,b 上连续，且在 a,b 内有 $f \quad x \quad 0$.证明：在 a,b 内存在唯一的 ，使曲线 $y \quad f \quad x$ 与两直线 $y \quad f \quad$ ，$x \quad a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y \quad f \quad x$ 与两直线 $y \quad f \quad$ ，$x \quad b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

十、填空题（每小题 2 分，满分 6 分）

1）设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为____________

2）在区间 $0,1$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”概率为____________

3）设随机变量 X 服从均值为10，均方差为0.02 的正态分布.已知 $x \quad {}^{x} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{u^2}{2}} du$，$2.5 \quad 0.9938$，则 X 落在区间 $9.95,10.05$ 内的概率为______________

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) \quad \frac{1}{1 \quad x^2}$，求随机变量 $Y \quad 1 \quad \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

数学Ⅱ

一、（本题满分 15 分，每小题 5 分）

(1) 【同数学Ⅰ第一（1）题】

(2) 【同数学Ⅰ第一（2）题】

(3) 【同数学Ⅰ第一（3）题】

二、填空题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

(1) 【同数学Ⅰ第二（1）题】

(2) 【同数学Ⅰ第二（2）题】

(3) 【同数学Ⅰ第二（3）题】

(4) 【同数学Ⅰ第二（4）题】

三、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 【同数学Ⅰ第三（1）题】

(2) 【同数学Ⅰ第三（2）题】

(3) 【同数学Ⅰ第三（3）题】

(4) 【同数学Ⅰ第三（4）题】

(5) 【同数学Ⅰ第三（5）题】

四、（本题满分 18 分，每小题 6 分）

(1) 【同数学Ⅰ第四题】

(2) 计算 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{x}{2y} dy$

(3) 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点M处的切平面 π 的方程，使平面 π 过已知直线 $l:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

五、（本题满分 8 分）【同数学Ⅰ第五题】

六、（本题满分 9 分）【同数学Ⅰ第六题】

七、（本题满分 6 分）【同数学Ⅰ第七题】

八、（本题满分 8 分）【同数学Ⅰ第八题】

九、（本题满分 9 分）【同数学Ⅰ第九题】

数学III

一、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

（1）若 $f\ x \quad \begin{matrix} e^x \ \sin x \quad \cos x\ , x \quad 0 \\ 2x \quad a, \qquad\qquad x \quad 0 \end{matrix}$ 是 , 上的连续函数，则 a ________

(2) 【同数学 I 第二（1）题】

(3) 【同数学 I 第二（3）题】

(4) $\lim_{x \quad 0} (\frac{1}{\sqrt{x}})^{\tan x}$ ________

（5） $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$ ________

二、选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

（1） $f(x) \quad \frac{1}{3}x^3 \quad \frac{1}{2}x^2 \quad 6x \quad 1$ 的图形在点 $0,1$ 处切线与 x 轴交点的坐标是（ ）

（A） $\frac{1}{6}, 0$ （B） $1, 0$ （C） $\frac{1}{6}, 0$ （D） $1, 0$

（2）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 , 上皆可导，且 $f(x) \quad g(x)$，则必有（ ）

（A） $f(\ x) \quad g(\ x)$ （B） $f\ (x) \quad g\ (x)$

（C） $\lim_{x \quad x_0} f(x) \quad \lim_{x \quad x_0} g(x)$ （D） $\int_0^x f(t)dt \quad \int_0^x g(t)dt$

(3) 【同数学 I 第二（1）题】

(4) 曲线 $y \quad \sin^{\frac{3}{2}} x,\ 0 \quad x$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体体积是（ ）

（A） $\frac{4}{3}$ （B） $\frac{4}{3}$ （C） $\frac{2}{3}\ ^2$ （D） $\frac{2}{3}$

(5) 【同数学 I 第三（5）题】

三、（本题满分 15 分，每小题 5 分）

(1) 【同数学 I 第一（2）题】

(2) 已知 $y \quad 1 \quad xe^{xy}$，求 $y\ |_{x \quad 0}$ 及 $y\ |_{x \quad 0}$

(3) 求微分方程 $y \quad \frac{1}{x} y \quad \frac{1}{x\ x^2 \quad 1}$ 的通解（一般解）.

四、（本题满分 12 分）

作函数 $y \quad \frac{6}{x^2 \quad 2x \quad 4}$ 的图形，并填写下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
极值	
凹　　区间	
凸　　区间	
拐 点	
渐近线	

五、(本题满分 8 分)

将长为a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形. 问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

六、(本题满分 10 分)【同数学 I 第五题（分值不同）】

七、(本题满分 7 分)

设 x　1，求 $\int_{1}^{x} 1\ |t|\ dt$.

八、(本题满分 8 分)

设 $f\ x$ 在　,　上有连续导数，且 $m\quad f\ x\quad M$.

(1) 求 $\lim\limits_{a\quad 0} \frac{1}{4a^2}\int_{a}^{a} f\ t\ a\quad f\ t\ a\ dt$；

(2) 证明 $\left|\frac{1}{2a}\int_{a}^{a} f\ t\ dt\quad f\ x\right|\quad M\quad m,\ a\quad 0$.

数学Ⅳ

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

（一）已知函数 f x $\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}dt$， x

（1） f x ________

2 f x 的单调性：________

3 f x 的奇偶性：________

4 f x 图形的拐点：________

5 f x 图形的凹凸性：________

6 f x 图形的水平渐近线：________

（二）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ________

（三）$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}^{1}$ ________

（四）假设P A 0.4，P A B 0.7，那么

（1）若 A 与 B 互不相容，则 P B ________

（2）若 A 与 B 相互独立，则 P B ________

二、判断题（本题满分 10 分，每小题答对得 2 分，答错得-1 分，不答得 0 分，全题最低 0 分）

（1）若极限 $\lim\limits_{x \quad x_0}$ f x 与 $\lim\limits_{x \quad x_0}$ f x g x 都存在，则极限 $\lim\limits_{x \quad x_0}$ g x 必存在.（ ）

（2）若 x_0 是函数 f x 的极值点，则必有 f x 0 . （ ）

（3）等式 $\int_0^a$ f x dx $\int_0^a$ f a x dx，对任何实数a 都成立.（ ）

（4）若 A 和 B 都是n 阶非零方阵，且AB 0，则 A 的秩必小于n .（ ）

（5）若事件A，B，C 满足等式 A B B C，则 A B .（ ）

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$

(2) 已知 $u+e^{u}=xy$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(3) 求定积分 $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}dx$

四、(本题满分 6 分，每小题 3 分)

⑴ 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

⑵ 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

五、(本题满分 6 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 P 的函数：$D=D(p)=\frac{a}{p^2}$，$S=S(p)=bp$，其中 $a>0$ 和 $b>0$ 是常数；价格 P 是时间 t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]$，（k 是常数），假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求：

① 需求量等于供给量时的均衡价格 P_e；

② 价格函数 $P(t)$；

③ 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)$

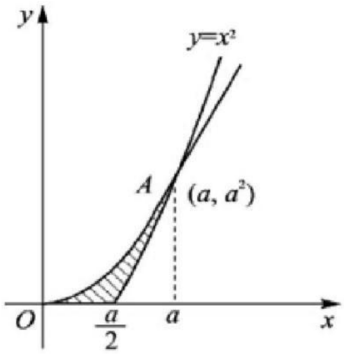
六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y=x^2$，$x\ge 0$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围成的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

(1) 切点A的坐标；

(2) 过切点A的切线方程：

(3) 由上述所围平面图形绕x 轴旋转一周所成旋转体的体积.



七、（本题满分 8 分）

已给线性方程组 $\begin{cases} x_1 \quad x_2 \quad 2x_3 \quad 3x_4 \quad 1 \\ x_1 \quad 3x_2 \quad 6x_3 \quad x_4 \quad 3 \\ 3x_1 \quad x_2 \quad k_1x_3 \quad 15x_4 \quad 3 \\ x_1 \quad 5x_2 \quad 10x_3 \quad 12x_4 \quad k_2 \end{cases}$，问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？无穷解？在方程组有无穷解的情景下，试求出一般解.

八、（本题满分 7 分）

已知向量组 $a_1, a_2, \quad , a_s \quad s \quad 2$ 线性无关，设 $_1 \quad a_1 \quad a_2$，$_2 \quad a_2 \quad a_3$，…，$_{s\ 1} \quad a_{s\ 1} \quad a_s$，$_s \quad a_s \quad a_1$，讨论向量组 $_1, \ _2, \ , \ _s$ 的线性相关性.

九、（本题满分 6 分）

设 A 是三阶方阵，A 是 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A| \quad \frac{1}{2}$，求行列式 $|3A^{\ 1} \quad 2A|$ 的值.

十、（本题满分 6 分）

玻璃杯成箱出售，每箱20 只，假设各箱含0, 1, 2 只残次品的概率是0. 8, 0. 1, 0. 1，一顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机观察4 只，若无残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回. 试求：

1 顾客买下该箱的概率 ；

2 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 .

十一、（本题满分 6 分）

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

① 写出 X 的概率分布；

② 利用棣莫佛拉普拉斯定理. 求出索赔户不少于14 户且不多于30户的概率的近似值.

（附： (2. 5) 0. 994, (1. 5) 0. 993）

十二、（本题满分 6 分）

假设随机变量X 在区间 1, 2 上服从均匀分布. 试求随机变量Y e^{2x} 的概率密度 f y .

数学Ⅴ

一、【同数学Ⅳ第一题】

二、【同数学Ⅳ第二题】

三、(每小题 4 分，满分 16 分)

（1）求极限 $\lim\limits_{x\quad 1} 1 \quad x^2 \quad \tan\frac{-}{2}x$

（2）已知 $u \quad e^{\frac{x}{y}}$，求 $\frac{{}^2u}{x\quad y}$

（3）【同数学Ⅳ第三（3）题】

（4）【同数学Ⅳ第三（4）题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b，使函数 $f \quad x \quad \begin{cases} ax \quad b, x \quad 1 \\ x^2, x \quad 1 \end{cases}$ 处处可导.

五、(本题满分 8 分)【同数学Ⅲ第五题】

六、(本题满分 8 分)【同数学Ⅳ第六题】

七、(本题满分 8 分)【同数学Ⅳ第七题】

八、(本题满分 6 分)

已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2 \quad 3A \quad 2E \quad 0$, E 是单位矩阵.证明 A 可逆并求出其逆矩阵 $A^{\ 1}$.

九、（本题满分 7 分）【同数学Ⅳ第八题】

十、（本题满分 7 分）【同数学Ⅳ第十题】

十一、（本题满分 7 分）

假设有十只同种电器元件，其中有两只废品，装配仪器时从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只：若仍是废品，则扔掉再取一只.试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布，数学期望与方差.

十二、（本题满分 5 分）【同数学Ⅳ第十二题】

1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学（试卷一）

一．(本题满分 15 分，每小题 5 分)

(1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域.

解：因$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n+1)}|x-3|=\dfrac{1}{3}|x-3|$, 故$\dfrac{1}{3}|x-3|<1$即$0<x<6$时，幂级数收敛. ，，，，3 分

当$x=0$时，原级数成为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，是收敛的. ，，，，4 分

当$x=6$时，原级数成为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，是发散的. ，，，，5 分

所以，所求的收敛域为$[0,6)$.

(2) 已知 f(x)= e^{x^2},$f[\varphi(x)]$=1-x,且 φ(x)≥0.求 φ(x)并写出它的定义域.

解：由$e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. ，，，，3 分

由$\ln(1-x)\ge 0$，得$1-x\ge 1$即$x\le 0$. ，，，，5 分

所以$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为$(-\infty,0)$.

(3)设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dxdx+z^3dxdy$.

解：根据高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，有

$I=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$（其中$\Omega$是由$S$所围成的区域） ，，，，2 分

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$ ，，，，4 分

$=\dfrac{12\pi}{5}$. ，，，，5 分

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

(1) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=\underline{(2t+1)e^{2t}}$

(2) 设 f(x)是周期为 2 的周期函数，它在区间$(-1,1]$上的定 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则 f(x)的付立叶级数在 x=1 处收敛于 $\underline{\dfrac{2}{3}}$.

(3) 设 f(x)是连续函数，且$\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 f(7)= $\underline{\dfrac{1}{12}}$.

(4) 设 4*4 矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4, |B|=1$，则行列式$|A+B|=$. $\underline{40}$.

三、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 若函数 y=f(x)有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$时，该函 $x=x_0$ 处的微分 dy 是　　(B)

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0　　(A)

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单调增加　　(D) 某个邻域内单调减少

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$; 及$\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, 则　(C)

(A) $\iiint_{\Omega_1} xdv = 4\iiint_{\Omega_2} xdv$　　(B) $\iiint_{\Omega_1} ydv = 4\iiint_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint_{\Omega_1} zdv = 4\iiint_{\Omega_2} zdv$　　(D) $\iiint_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint_{\Omega_2} xyzdv$

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 x=-1 处收敛，则此级数在 x=2 处　　(B)

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性不能确定

(5) n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是　　(D)

(A) 有一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\quad,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_s\alpha_s\ne 0$.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出.

(D)(D) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四. (本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解： $\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$,,,,2 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$. ,,,,3 分

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$. ,,,,5 分

所以 $x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$. ,,,,6 分

五、(本题满分 8 分)

设函数 y=y(x)满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$，且图形在点(0，1)处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合，求函数 $y = y(x)$.

解： 对应齐次方程的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. ,,,,2 分

设原方程的特解为 $y^* = Axe^x$, ,,,,3 分

得 $A = -2$. ,,,,4 分

故原方程通解为 $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^{2x}$. ,,,,5 分

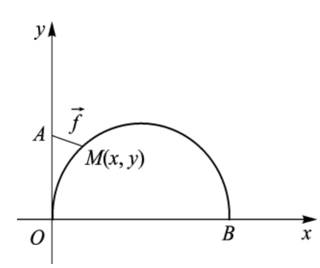
又已知有公共切线得 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1$, ,,,,7 分

即 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$ 解得 $c_1 = 1, c_2 = 0$. ,,,,8 分

所以 $y = (1 - 2x)e^{2x}$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点(0，1)的质点A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$(k>0 为常数，r 为质点 A 与M 之间的距离—)，质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 B(2,0)运动到 O(0，0).求在此运动过程中质点 A 对质 M 点的引力所做的功.



解： $\overrightarrow{MA} = \{0 - x, 1 - y\}$,,,,2 分

$r = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2}$.

因引力 $\vec{f}$ 的方向与 $\overrightarrow{MA}$ 一致，

故 $\vec{f} = \frac{k}{r^3}\{-x, 1 - y\}$. ,,,,4 分

从而 $W=\int_{BO}\frac{k}{r^3}[-xdx+(1-y)dy]$,,,,6 分

$=k\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$. ,,,,9 分

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP=PB$,其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ 求 A 及 A^5.

解: 先求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$. ,,,,2 分

因 $AP=PB$,故 $A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$. ,,,,4 分

从而 $A^5=\overbrace{AAAAA}^{5\text{个}}=\overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5\text{个}}=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$. ,,,,6 分

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 x 与 y; **(2)** 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

解:(1) 因 **A** 与 **B** 相似,故 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|$,即 ,,,,1 分

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix},$$

亦即 $(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)(\lambda^2+(1-y)\lambda-y)$.

比较两边的系数得 $x=0, y=1$.此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.　　,,,,3 分

(2) 从 B 可以看出 **A** 的特征值 $\lambda=2,1,-1$.　　,,,,4 分

对 $\lambda=2$，可求得 **A** 的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对 $\lambda=1$，可求得 **A** 的特征向量为 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

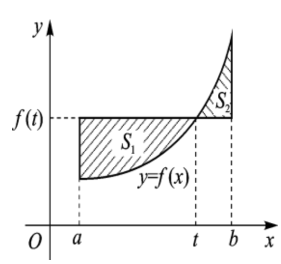
对 $\lambda=-1$，可求得 **A** 的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.　　,,,,7 分

因上述 p_1, p_2, p_3 是属于不同特征值的特征向量，故它们线性无关.

令 $\mathbf{P}=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则 **P** 可逆，且有 $P^{-1}AP=B$.　　,,,,8 分

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$.证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 s_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 s_2 的 3 倍.



证：存在性 在 $[a, b]$ 上任取一点 t，令

$$F(t)=\int_a^t [f(t)-f(x)]dx-3\int_t^b [f(x)-f(t)]dx$$
$$=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(t)dx\right]-3\left[\int_t^b f(x)dx-f(t)(b-t)\right]$$,,,3 分

则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

又因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调增加的.

于是在 (a, b) 内取定点 c，有

$$F(a)=-3\int_a^b [f(x)-f(a)]dx=-3\int_a^c [f(x)-f(a)]dx-3\int_c^b [f(x)-f(a)]dx$$
$$\le -3\int_c^b [f(x)-f(a)]dx=-3[f(\xi_1)-f(a)](b-c)<0,\quad c\le\xi_1\le b \,..$$

$F(b)=\int_a^b[f(b)-f(x)]dx=\int_a^c[f(b)-f(x)]dx+\int_c^b[f(b)-f(x)]dx$

$\ge\int_a^c[f(b)-f(x)]dx=[f(b)-f(\xi_2)](c-a)>0,\quad a\le\xi_2\le c.$,,,,5 分

所以由介值定理知，在(a,b)内存在ξ，使 $F(\xi)=0$，即 $S_1=3S_2$. ,,,,6 分

唯一性 因 $F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$， ,,,,8 分

故 $F(t)$ 在(a,b)内是单调增加的.因此，在(a,b)内只有一个ξ，使 $S_1=3S_2$. ,,,,9 分

十、填空题(共 6 分，每个 2 分)

(1) 设三次独立实验中，事件 A 出现的概率相等.若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

(2) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为 $\underline{\frac{17}{25}}$.

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布.已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$，$\Phi(2.5)=0.9938$，则 X 落在区间(9.95，10.05)内的概率为 $\underline{0.9876}$.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_x(\mathrm{x})=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量$Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： 因Y的分布函数

$F_Y(y)=P(Y<y)$,,,,1 分

$=P\{1-\sqrt[3]{X}<y\}=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}=P\{X>(1-y)^3\}$,,,,2 分

$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right].$,,,,4 分

故Y的概率密度函数为 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}.$,,,,6 分

数 学（试卷二）

一．(本题满分 15 分，每小题 5 分)

(1) 【 同数学一 第一、(1) 题 】

(2) 【 同数学一 第一、(2) 题 】

(3) 【 同数学一 第一、(3) 题 】

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

(1) 【 同数学一 第二、(1) 题 】

(2) 【 同数学一 第二、(2) 题 】

(3) 【 同数学一 第二、(3) 题 】

(4) 【 同数学一 第二、(4) 题 】

三、选择题(本题满分 15 分，每小题 3 分)

(1) 【 同数学一 第三、(1) 题 】

(2) 【 同数学一 第三、(2) 题 】

(3) 【 同数学一 第三、(3) 题 】

(4) 【 同数学一 第三、(4) 题 】

(5) 【 同数学一 第三、(5) 题 】

四．(本题满分 18 分，每小题 6 分)

(1) 【 同数学一 第四题 】

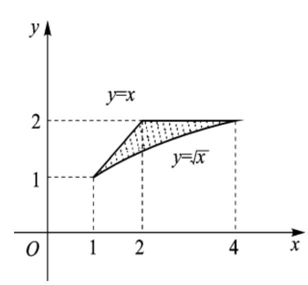
(2) 计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

解： $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$,,,,,3 分

$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)dy$. ,,,,,4 分

$=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t\,dt$ $\left(令 t=\frac{\pi y}{2}\right)=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$. ,,,,,6 分



(3) 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使平面 π 过已知直线 $l:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

解： 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$, 则 $F_x=2x, F_y=4y, F_z=6z$.

椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$, 即 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$. ,,,,2 分

因为平面 π 过直线 L，故 L 上的任两点，比如点 $A(6,3,\frac{1}{2})$、$B(0,0,\frac{7}{2})$ 应满足 π 的方程，

代入有 $6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21$ (1)

$z_0=2$ (2)

又因 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$, (3)

于是有 $x_0=3, y_0=0, z_0=2$ 及 $x_0=1, y_0=2, z_0=2$. ,,,,4 分

故所求切平面 π 的方程为 $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$. ,,,,6 分

五、（本题满分 8 分）【 同数学一 第五题 **】**

六、（本题满分 9 分）【 同数学一 第六题 **】**

七、（本题满分 6 分）【 同数学一 第七题 **】**

八、（本题满分 8 分）【 同数学一 第八题 **】**

九、（本题满分 9 分）【 同数学一 第九题 **】**

数 学（试卷三）

一、填空题 (本题满分 20 分，每小题 4 分)

(1) 若 $f(x)=\begin{cases} e^{2}(\sin x+\cos x), x>0 \\ 2x+\alpha, x\le 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数，则 $\alpha =$ __1__ .

(2) 【 同数学一 第二、（1）题 】

(3) 【 同数学一 第二、（3）题 】

(4) $\lim\limits_{x\to+0}(\frac{1}{\sqrt{x}})^{tgx}=$ __1__ .

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=2(e^2+1)$

二、选择题 (本题满分 20 分，每小题 4 分)

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点（0，1）处切线与 x 轴交点的坐标是 (A)

(A) $(-\frac{1}{6},0)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(-\frac{1}{6},0)$ (D) $(1,0)$

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)$〈 $g(x)$，则必有 (C)

(A) $f(-x)>g(-x)$ (B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ (D) $\int_0^X f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

(3) 【 同数学一 第二（1）题 】

(4) 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转 (B)

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $\frac{2}{3}\pi^2$ (D) $\frac{2}{3}\pi$ 【B 】

(5) 【 同数学一 第三（5）题 】

三、(本题满分 15 分，每小题 5 分)

(1) 【 同数学一第一、（2）题 】

(2) 已知 $y=1+xe^{xy}$，求 $y'|x=0$ 及 $y''|x=0$.

解： 显然 $x=0$ 时，$y=1$. ,,,,1 分

$y'=xe^{xy}(xy'+y)+e^{xy}=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$. ,,,,2 分

因此 $y'|_{x=0}=e^0=1$； ,,,,3 分

而 $y' = e^{xy}(x^2y' + 2xy' + xy' + y) + e^{xy}(x^2y' + xy + 1)(xy' + 1)$， ，，，，4 分

即得 $y''|_{x=0} = e^0 + e^0 = 2$. ，，，，5 分

(3) 求微分方程 $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解（一般解）.

解： $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int \dfrac{1}{x(x^2+1)} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right]$ ，，，，3 分

$= \dfrac{1}{x}\left[\int \dfrac{dx}{x^2+1} + C\right]$ ，，，，4 分

$= \dfrac{1}{x}\left[\arctan x + C\right]$，其中 C 是任意常数. ，，，，5 分

四、(本题满分 12 分)

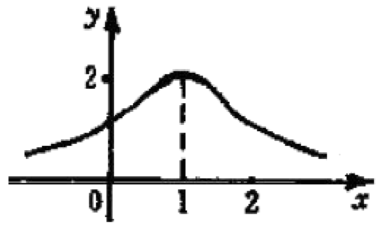
作函数 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形，并填写下表

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极　值	
凹($\cup$) 区间	
凸($\cap$) 区间	
拐　点	
渐近线	

解：

单调增加区间	$(-\infty, 1)$	（1 分）
单调减少区间	$(1, +\infty)$	（2 分）
极值点	1	（3 分）
极值	2	（4 分）
凹区间	$(-\infty, 0)$及$(2, +\infty)$	（6 分）
凸区间	$(0, 2)$	（7 分）
拐点	$(0, \frac{3}{2})$及$(2, \frac{3}{2})$	（9 分）
渐近线	$y = 0$	（10 分）

其图形为：



五、(本题满分 8 分)

将长为a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

解： 设圆形的周长为 x，则正方形的周长为$a-x$，而两面积之和为

$A=\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{4+\pi}{16\pi}x^2-\dfrac{a}{8}x+\dfrac{a^2}{16}$， ,,,,3 分

$A'=\dfrac{4+\pi}{8\pi}x-\dfrac{a}{8}\overset{（令）}{=\!=\!=}0$，得 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$. ,,,,5 分

$A''=\dfrac{4+\pi}{8\pi}>0$. ,,,,7 分

故当圆的周长为 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$ 时，正方形的周长为$a-x=\dfrac{4a}{4+\pi}$ 时，A 之值最小. ,,,,8 分

六、(本题满分 10 分)【 同数学一 第五题（分值不同）】

七、(本题满分 7 分)

设 $x\ge -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

解： 当 $-1\le x<0$ 时，$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1+t)dt$,,,,1 分

$=\dfrac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}$,,,,2 分

$=\dfrac{1}{2}(1+x)^2$. ,,,,3 分

当 $x\ge 0$ 时，$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt$,,,,5 分

$=1-\dfrac{1}{2}(1-x)^2$. ,,,,7 分

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有连续导数，且 $m \le f(x) \le M$.

(1) 求 $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$； **(2)** 证 $\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t)dt-f(x)\right| \le M-m\ (a>0)$.

解：(1) 由积分中值定理和微分中值定理有

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\ (a\le\xi\le a)$$ …… 2 分

$$=\lim_{a\to 0^+}f'(\xi^*)=\lim_{\xi^*\to 0}f'(\xi^*)\quad(-2a\le\xi-a<\xi^*<\xi+a\le 2a)=f'(0).$$ …… 4 分

(2) 证： 由 $f(x)$ 的有界性及积分估值定理有 …… 5 分

$$m\le\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt\le M,$$ …… 6 分

又 $-M\le -f(x)\le -m$， …… 7 分

故有 $$-(M-m)\le\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\le M-m,$$

即 $$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)dt-f(x)\right|\le M-m.$$ …… 8 分

数 学（试卷四）

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

(一) 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt, -\infty<x<\infty.$

（1） $f'(x)=\underline{e^{-\frac{1}{2}t^2}}$.

（2） $f(x)$ 的单调性：__单调增加__.

（3） $f(x)$ 的奇偶性：__奇函数__.

（4） $f(x)$ 图形的拐点：_ 0，0）

（5） $f(x)$ 图形的凹凸性：$\underline{x<0\text{时上凹（下凸）}, x>0\text{时下凹（上凸）}}$.

（6） $f(x)$ 图形的水平渐近线近线：$\underline{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

(二) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\underline{\quad -3 \quad}$.

(三) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$.

(四) 假设 $P(A)=0.4$，$P(A \quad B)=0.7$，那么

（1） 若 A 与 B 互不相容，则 P（B）= __0.3__.

（2） 若 A 与 B 相互独立，则 P（B）= __0.5__.

二、（本题满分 10 分）（每小题，回答正确得 2 分，回答错误得-1 分，不回答得 0 分；全题最低得 0 分）

（1） 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在. （×）

（2） 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$. （×）

（3） 等式 $\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(a-x)dx$, 对任何实数 a 都成立. （×）

（4） 若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵，且 AB=0，则 A 的秩必小于 n. （√）

(5) 若事件A，B，C满足等式 $A\cup C=B\cup C$， 则 A=B. （×）

三、（本题满分 16 分，每小题 4 分.）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

解一： 此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由罗必塔法则，则

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to 1}x^x=1$. ，，，，4 分

解二： 令 $t=x\ln x$，则 $x^x=e^t$.由于当 $x\to 1$ 时， $t\to 0$，可见

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}e^t=1$. ，，，，4 分

(2) 已知U＋ $e^u=xy$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解： 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{1+e^u}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{1+e^u}$， ，，，，2 分

可见 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{1+e^u-ye^u\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2}$ ，，，，3 分

$=\dfrac{1}{1+e^u}-\dfrac{xye^u}{(1+e^u)^3}$. ，，，，4 分

(3) 求定积分 $\int_0^3\dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解一： 由于 $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})$，可见

原式 $=\int_0^3\dfrac{2d\sqrt{x}}{1+x}$ ，，，，2 分

$=\dfrac{2\pi}{3}$. ，，，，4 分

解二： 令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2,dx=2tdt$；当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=3$ 时，$t=\sqrt{3}$；

，，，，1 分

于是，原式 $=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{2dt}{1+t^2}$ ，，，，2 分

$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^3$ ，，，，3 分

$$=\frac{2\pi}{3}.$$,,,,4 分

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}dx$.

解： 在原式中交换积分次序，得 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\int_0^x\frac{\cos x}{x}dy$,,,,2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos xdx=\sin x|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$,,,,4 分

.

四、（本题满分６分，每小题３分）

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

解： 由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+2)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^{n+1}}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{e}<1$， ,,,,2 分

故由级数收敛的比值判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛. ,,,,3 分

(2) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

证： 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty}b_i^2$ 都收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2)$ 收敛. ,,,,2 分

而 $a_nb_n\le\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，

故由比较判别法，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛. ,,,,3 分

五、（本题满分 8 分）

已知某商品的需求量 D 和供给量都是价 P 的函数： $D=D(p)=\frac{a}{p^2}$， $S=S(p)=bp$，其中 a>0 和 b>0 是常数：价格p 是时间t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt}=k[d(p)-s(p)]$,(k 是常数)，假设当 t=0 时价格为 1.试求：

（1）需求量等于供给量时的均衡价格 P_e； （2）价格函数 $p(t)$； （3）极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)$.

解：(1) 当需求量等于供给量时，有 $\frac{a}{p^2}=bp$，即 $p^3=\frac{a}{b}$. 故 $p_e=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$. ,,,,1 分

(2) 由条件知 $\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]=k[\frac{a}{p^2}-bp]=k\frac{b}{p^2}[\frac{a}{b}-p^3]$.

因此有 $\frac{dp}{dt}=k\frac{b}{p^2}[p_e^3-p^3]$，即 $\frac{p^2dp}{p^3-p_e^3}=-kbdt$. ,,,,3 分

在该式两边同时积分得 $p^3=p_e^3+ce^{-3kbt}$. ,,,,5 分

故由条件 $P(0)=1$，可得 $c=1-p_e^3$.于是价格函数为 $p(t)=[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$. ,,,,6 分

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\lim\limits_{t\to\infty}[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}=p_e$,,,,8 分

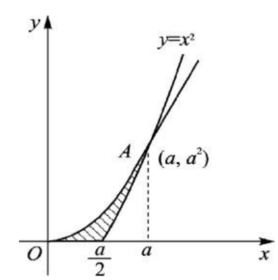
六、（本题满分 8 分）

在曲线 $y=x^2(x\geq 0)$ 上某点A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

(1) 切点A 的坐标；

(2) 过切点A 的切线方程；

(3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.



解： 设切点A 的坐标为(a,a^2)，

则过点A 的切线方程的斜率为

$y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，即 $y=2ax-a^2$. ,,,,2 分

可见，切线与 x 轴的交点为$(\frac{a^2}{2},0)$. 故曲线、x 轴以上及切线这三者所围图形的面积为

$$S=\int_0^a x^2dx-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}.$$,,,,4 分

而由题设知 $S=\frac{1}{12}$，因此 $a=1$. ,,,,5 分

于是，切点 A 的坐标为$(1,1)$，过切点$(1,1)$的切线方程为 $y=2x-1$. ,,,,6 分

旋转体的体积为 $V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$. ,,,,8 分

七、（本题满分 8 分）

已给线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}$，问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷解？在方程组有无穷解的情景下，试求出一般解.

解： 以 $\mathbf{A}$ 表示方程组的系数矩阵，以 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})$ 表示增广矩阵，

因 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array}\right)$,,,,2 分

故当 $k_1\neq 2$ 时， $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=4$ ，方程组有唯一解； ,,,,3 分

当 $k_1=2$ 时，有 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{array}\right)$,,,,4 分

这时，若 $k_2\neq 1$，则 $R(\mathbf{A})=3<R(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=4$ ，故方程组无解；

若 $k_2=1$，则 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=3<4$ ，故方程组有无穷多组解，此时有 ,,,,6 分

$(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,,,,7 分

相应的方程组为 $\begin{cases} x_1=-8; \\ x_2=3-2x_3 \\ x_4=2. \end{cases}$ ，取 $x_3=c$（c 为任意常数），得方程组的一般解：

$x_1=-8, x_2=3-2c, x_3=c, x_4=2$. ,,,,8 分

综上所述：当 $k_1\neq 2$ 时，方程组有唯一解；当 $k_1=2$ 而 $k_2\neq 1$ 时，方程组无解；

当 $k_1=2$ 且 $k_2=1$ 时，方程组有无穷多组解，其一般解为

$x_1=-8, x_2=3-2c, x_3=c, x_4=2$ ，其中 c 为任意常数.

八、（本题满分 7 分）

已知向量组 $a_1, a_2, \ \ , a_s$（S≥2）线性无关，设 $\beta_1=a_1+a_2, \beta_2=a_2+a_3, \ \ , \beta_{s-1}+a_s, \beta_s=a_s+a_1$，

讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\ \ ,\beta_s$ 的线性相关性.

解：假设$k_1,k_2,\ \ ,k_s$是一数组，满足条件$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ \ +k_s\beta_s=0$ ，，，，1 分

那么，有$(k_s+k_1)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\ \ +(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0.$

由于$a_1,a_2,\dots,a_s$，线性无关，故有
$$\begin{cases}k_s+k_1=0\\ k_1+k_2=0\\ k_2+k_3=0\\ \\ k_{s-1}+k_s=0\end{cases}\qquad (*)$$
，，，，3 分

此方程组的系数行列式为 s 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&&0&1\\1&1&0&&0&0\\0&1&1&&0&0\\ &&&&&\\0&0&0&&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases}2, & \text{若s为奇数}\\ 0, & \text{若s为偶数}\end{cases}$$
，，，，5 分

若s为奇数，则 $D=2\neq 0$，故方程组（*）只有零解，即$k_1,k_2,\ \ ,k_s$必全为 0. 这时，向量组 $\beta_1,\beta_2,\ \ ,\beta_s$线性无关.

若s为偶数，则$D=0$，故方程组（*）有非零解，即存在不全为0的数组$k_1,k_2,\ \ ,k_s$，使$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ \ +k_s\beta_s=0$.这时，向量组$\beta_1,\beta_2,\ \ ,\beta_s$线性相关， ，，，，7 分

九、（本题满分 6 分）

设 A 是三阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$ 的值.

解： 因 $(3\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$， ，，，，2 分

故 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\cdot\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$， ，，，，3 分

所以 $|(3A)^{-1}-2A^*|=|\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}|=\left|-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|\mathbf{A}^{-1}|$ ，，，，5 分

$=-\frac{16}{27}.$ ，，，，6 分

十、（本题满分 7 分）

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率是0.8，0.1 和 0.1，一顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机观察 4 只，若无

残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回.试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α； **(2)** 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β .

解：设 B_i =｛箱中恰有 i 件残品次品｝（$i=0,1,2$），A=｛顾客买下所察看的一箱｝.

,,,,1 分

由题意知 $P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1$； $P(A\,|\,B_0)=1, P(A\,|\,B_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5}$；

$P(A\,|\,B_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$. ,,,,3 分

(1) 由全概率公式 $\alpha=P(A)=\sum\limits_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\,|\,B_i)=0.8+\dfrac{0.4}{5}+\dfrac{1.2}{19}\approx 0.94$； ,,,,5 分

(2) 由贝叶斯公式 $\beta=P(B_0\,|\,A)=\dfrac{P(B_0)P(A\,|\,B_0)}{P(A)}\approx\dfrac{0.8}{0.94}\approx 0.85$. ,,,,7 分

十一、（本题满分 6 分）

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布；

(2) 利用棣莫佛拉普拉斯定理，求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解：**(1)** X 服从二项分布，参数 $n=100, p=0.2$，其概率分布为

$P\{X=k\}=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k} \quad (k=0,1, \quad 100)$. ,,,,2 分

(2) 由 $X \quad B(n,p)$ 知， $EX=np=20, DX=np(1-p)=16$， ,,,,4 分

故根据棣莫佛一拉普拉斯定理，有

$$P\{14\le X\le 30\}=P\left\{\frac{14-20}{\sqrt{\ }}\le\frac{X-20}{\sqrt{\ }}\le\frac{30-20}{\sqrt{\ }}\right\}=P\left\{-1.5\le\frac{X-20}{\quad}\le 2.5\right\}$$,,,,5 分

$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)-[1-\Phi(1.5)]=0.994-[1-0.933]=0.927$. ,,,,6 分

十二、（本题满分 6 分）

假设随机变量X 在区间（1，2）上服从均匀分布.试求随机变量 $Y=e^{2x}$ 的概率密度 f(y).

解：由条件知， X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1, & 若 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$,,,,1 分

记 $F(y)=P\{Y\le y\}$ 为 Y 的分布函数，则有

$$F(y)=\begin{cases}0, & 若 y\le e^2 \\ \int_1^{\ln y}\frac{1}{2}dx, & 若 e^2<y<e^4 \\ 1, & 若 y\ge e^4\end{cases}$$

……2分

……3分

……4分

因此 $f(y)=F'(y)=\begin{cases}0, & 若 y<e^2 \\ \frac{\ }{2y}, & 若 e^2<y<e^4 \\ 0, & 若 y>e^4\end{cases}$ 于是（当 $y=e^2,e^4$ 时，补充定义 $f(y)=\bar{0}$），得

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & 若 e^2<y<e^4 \\ 0 & 若 y>e^4\end{cases}.$$

,,,,6 分

数 学（试卷五）

一、 【 同数学四 第一题 】

二、 【 同数学四 第二题 】

三、（本题满分 16 分，每小题 4 分.）

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)tg\dfrac{\pi}{2}x$.

解： 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\cot\dfrac{\pi}{2}x}$ ，，，，1 分

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{-\dfrac{\pi}{2}}\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{2}x$ ，，，，3 分

$=\dfrac{4}{\pi}$. ，，，，4 分

(2) 已知$u=e^{\frac{x}{y}}$，求$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$， ，，，，1 分

$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$ ，，，，3 分

$=-\dfrac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}}$. ，，，，4 分

(3) 【 同数学四 第三、（3）题 】

(4) 【 同数学四 第三、（4）题 】

四、（本题满分 6 分）

确定常数a 和b，使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, x>1\\ x^2, x\le1\end{cases}$ ，处处可导.

解： 当$x\ne1$时，显然$f(x)$可导； ，，，，1 分

为使 $x=1$ 时，导数 $f'(x)$ 存在，$f(x)$ 在 $x=1$ 处必须连续，

故有 $f(1+0)=f(1-0)=f(1)$， ，，，，2 分

由此可得 $a+b=1$. ,,,,3 分

又由 $f'(1+0)=a, f'(1-0)=2$, ,,,,4 分

以及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性，有 $f'(1+0)=f'(1-0)$.由此得 $a=2$， ,,,,5 分

从而 $b=-1$. ,,,,6 分

五、（本题满分 8 分.）【 同数学三 第五题 **】**

六、（本题满分 8 分.）【 同数学四 第六题 **】**

七、（本题满分 8 分.）【 同数学四 第七题 **】**

八、（本题满分 6 分.）

已知n 阶方阵A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=0$，其中A 给定，而E 是单位矩阵. 证明A 可逆，并求出其逆矩阵 A^{-1}.

解一： 由 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{E}=0$，可见 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}=2\mathbf{E}$， $\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2\mathbf{E}$.

在上式两端同取行列式，得$|\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})|=|2\mathbf{E}|$；$|\mathbf{A}|\cdot|(\mathbf{A}-3\mathbf{E})|=|2\mathbf{E}|=2^n\neq 0$,,,,3 分

由此可见$|\mathbf{A}|\neq 0$，从而 A 可逆. ,,,,4 分

在 $\mathbf{A}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2\mathbf{E}$ 两端同时左乘 $\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$. ,,,,6 分

解二： 由 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{E}=0$，可见 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}=2\mathbf{E}$. 从而有

$\mathbf{A}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\right]=\mathbf{E}$ 及 $\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\right]\mathbf{A}=\mathbf{E}$. ,,,,3 分

记 $B=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$，则 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$. 由逆矩阵的定义知 $\mathbf{A}$ 可逆，且$\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵：

$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$. ,,,,6 分

九、（本题满分 7 分.）【 同数学四 第八题 **】**

十、（本题满分 7 分.）【 同数学四 第十题 **】**

十一、（本题满分 7 分）

假设有十只同种电器元件，其中有两只废品装配仪器时从这批元件中任取一只，如是废品，则倒掉重新任取一只；若仍是废品，则扔掉再取一只.试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布，数学期望和方差.

解： 以 X 表示在取到正品前已取出的废品数.

知 X 是一随机变量，其有 3 个可能的取值：$0,1,2$. ,,,,1 分

（1）分布：$P\{X=0\}=\dfrac{8}{10}=0.8$；$P\{X=1\}=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$；

$$P\{X=2\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{1}{45}.$$,,,,4 分

（2）数学期望：$EX=0\times0.8+1\times\dfrac{8}{45}+2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{2}{9}$. ,,,,5 分

（3）方差：$EX^2=0^2\times0.8+1^2\times\dfrac{8}{45}+2^2\times\dfrac{1}{45}=\dfrac{4}{15}$, ,,,,6 分

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{88}{405}.$$,,,,7 分

十二、（本题满分 5 分.）【 同数学四 第十二题 分值不同 **】**