

## 2019 年考研数学二真题

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $x - \tan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k =$  ( )

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ) 的拐点是 ( )

- (A)  $(0, 2)$  (B)  $(\pi, -2)$  (C)  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (D)  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$

3. 下列反常积分发散的是 ( )

- (A)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$  (B)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$  (C)  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$  (D)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

4. 已知微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的通解为  $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$ , 则  $a, b, c$  依次为 ( )

- (A) 1, 0, 1 (B) 1, 0, 2 (C) 2, 1, 3 (D) 2, 1, 4

5. 已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 记  $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,

$I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ , 则 ( )

- (A)  $I_3 < I_2 < I_1$  (B)  $I_2 < I_1 < I_3$  (C)  $I_1 < I_2 < I_3$  (D)  $I_2 < I_3 < I_1$

6. 设函数  $f(x), g(x)$  的二阶导函数在  $x = a$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0$  是两条曲线  $y = f(x)$ ,

$y = g(x)$  在  $x = a$  对应的点处相切及曲率相等的 ( )

- (A) 充分不必要条件 (B) 充分必要条件 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设  $A$  是四阶矩阵,  $A^*$  为其伴随矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有两个向量, 则  $r(A^*) =$

- ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 设  $A$  是三阶实对称矩阵,  $E$  是三阶单位矩阵, 若  $A^2 + A = 2E$ , 且  $|A| = 4$ , 则二次型  $x^T Ax$  的规范形是 ( )

- (A)  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$  (B)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$  (C)  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$  (D)  $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

10. 曲线  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  在  $t = \frac{3\pi}{2}$  对应点处的切线在  $y$  的截距为 \_\_\_\_\_.

11. 设函数  $f(u)$  可导,  $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$ , 则  $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$  \_\_\_\_\_.

12. 曲线  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ) 的弧长为 \_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A_{ij}$  表示元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 则  $A_{11} - A_{12} =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

15. (本题满分 10 分) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 求  $f'(x)$ , 并求函数  $f(x)$  的极值.

16. (本题满分 10 分) 求不定积分  $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ .

17. (本题满分 10 分) 设函数  $y(x)$  是微分方程  $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$  满足条件  $y(1) = \sqrt{e}$  的特解.

(1) 求  $y(x)$  的表达式;

(2) 设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$ , 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

18. (本题满分 10 分) 设平面区域  $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$ , 计算二重积分  $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ .

19. (本题满分 10 分) 设  $n$  是正整数, 记  $S_n$  为曲线求曲线  $y = e^{-x} \sin x$  ( $0 \leq x \leq n\pi$ ) 与  $x$  轴所形成图形的面积, 求  $S_n$ , 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

20. (本题满分 11 分) 已知函数  $u(x, y)$  满足关系式  $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . 求  $a, b$  的值, 使得在变换

$u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$  之下, 上述等式可化为函数  $v(x, y)$  的不含一阶偏导数的等式.

21. (本题满分 11 分)

已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$ , 证明:

- (1) 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ ;
- (2) 至少存在一点  $\eta \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\eta) < -2$ .

22. (本题满分 11 分)

已知向量组 I:  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix};$

向量组 II:  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$ . 若向量组 I 和向量组 II 等价, 求常数  $a$  的值, 并将

$\beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

23. (本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似.

(1) 求  $x, y$  之值; (2) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

