

2019 年考研数学二真题

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$) 的拐点是 ()
 (A) $(0, 2)$ (B) $(\pi, -2)$ (C) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (D) $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2})$
3. 下列反常积分发散的是 ()
 (A) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ (B) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$
4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()
 (A) 1, 0, 1 (B) 1, 0, 2 (C) 2, 1, 3 (D) 2, 1, 4
5. 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 则 ()
 (A) $I_3 < I_2 < I_1$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$ (C) $I_1 < I_2 < I_3$ (D) $I_2 < I_3 < I_1$
6. 设函数 $f(x), g(x)$ 的二阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 是两条曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 充分必要条件 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 设 A 是四阶矩阵, A^* 为其伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(A^*) =$ ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
8. 设 A 是三阶实对称矩阵, E 是三阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形是 ()
 (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$ _____.
10. 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 的截距为 _____.

11. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

12. 曲线 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) 的弧长为 _____.

13. 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$ _____.

三、解答题

15. (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求函数 $f(x)$ 的极值.

16. (本题满分 10 分) 求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

17. (本题满分 10 分) 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$ 的表达式;

(2) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

18. (本题满分 10 分) 设平面区域 $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

19. (本题满分 10 分) 设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线求曲线 $y = e^{-x} \sin x$ ($0 \leq x \leq n\pi$) 与 x 轴所形成图形的面积, 求 S_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

20. (本题满分 11 分) 已知函数 $u(x, y)$ 满足关系式 $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. 求 a, b 的值, 使得在变换

$u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x, y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

21. (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$, 证明:

- (1) 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;
- (2) 至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

22. (本题满分 11 分)

已知向量组 I: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix};$

向量组 II: $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价, 求常数 a 的值, 并将

β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

23. (本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y 之值; (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

