2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（ ）

A. $a=\frac{1}{2},b=-1$　B. $a=-\frac{1}{2},b=-1$　C. $a=\frac{1}{2},b=1$　D. $a=-\frac{1}{2},b=1$

(2) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（ ）

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$　C. $f(x)=\cos|x|$　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leq -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geq 0\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则（ ）

A. $a=3,b=1$　B. $a=3,b=2$　C. $a=-3,b=1$　D. $a=-3,b=2$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 则（ ）

A. 当 $f'(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　B. 当 $f''(x)<0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$　D. 当 $f''(x)>0$ 时，$f(\frac{1}{2})<0$

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$ 则求 M,N,K 的大小关系（ ）

A. $M>N>K$　B. $M>K>N$　C. $K>M>N$　D. $K>N>M$

(6) $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$（ ）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{6}$

（7）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（ ）

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（8）.设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，$(X\quad Y)$ 表示分块矩阵，则（ ）

A. $r(A\quad AB)=r(A)$　　B. $r(A\quad BA)=r(A)$

C. $r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　D. $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________.

（10）曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是______.

（11）$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$_________.

（12）曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$对应点的曲率为________.

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的向量组，若$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$,则 A 的实际特征值为______.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。(15)

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

（16）已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（I）求 $f(x)$

（II）若 $f(x)$ 在区间[0,1]上的平均值为 1，求 a 的值。

（17）设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$

（18）已知常数 $k\ge \ln 2-1$，证明 $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$

（19）一根绳长 2m，截成三段，分别折成圆、正三角形、正方形，这三段分别为多长时所得的面积总和最小，并求该最小值。

（20）已知曲线 $L:y=\frac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$，设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积，若 P 运动到点（3，4）时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率。

（21）设数列 $\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1, n=1,2,\cdots$.证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（22）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数，

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

（23）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

（I）求 a

（II）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P